CBS
Colegio Bautista Shalom

Matemática V
Quinto BACL
Tercer Bimestre

Contenidos

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

- ✓ PARÁMETROS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.
- ✓ RECORDANDO. . .
- ✓ GRÁFICA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS.

SISTEMA CIRCULAR DE MEDICIÓN DE ÁNGULOS

- ✓ FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS.
- ✓ FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS.
- ✓ SIGNOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS SEGÚN EL CUADRANTE.

FUNCIÓN EXPONENCIA Y FUNCIÓN LOGARÍTICA

- ✓ FUNCIÓN EXPONENCIAL.
- ✓ LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA.
- ✓ USO DE LA CALCULADORA.

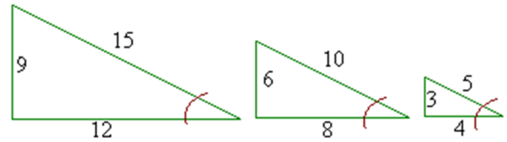
FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS

NOTAS: conforme vayas avanzando tu aprendizaje, encontrarás ejercicios a resolver. Recuerda que los ejercicios debes desarrollarlos en hojas aparte a lápiz y la respuesta escribirla en un recuadro con lapicero negro.

Sigue las instrucciones de tu catedrático(a).

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Cada par de lados homólogos (que se ubican en la misma posición) de un triángulo rectángulo cuyos ángulos sean iguales serán proporcionales. Para que sea más fácil interpretar lo que se está explicando el típico triángulo de catetos de 3 cm y 4 cm, que tendrá su hipotenusa de 5 cm (Pitágoras). Dibujemos otros dos triángulos donde los catetos y la hipotenusa sean el doble y el triple (según corresponda).



$$\frac{15}{5}=\frac{12}{4}=\frac{9}{3}=3 \rightarrow \textit{razón} \qquad \frac{10}{5}=\frac{8}{4}=\frac{6}{3}=2 \rightarrow \textit{razón}$$

La proporcionalidad también puede escribirse respecto a los lados homólogos.

$$\frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Hipotenusa}}=\frac{3}{5}=\frac{6}{10}=\frac{9}{15}=0.6 \qquad \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Opuesto}}=\frac{5}{3}=\frac{10}{6}=\frac{15}{9}=1.6666$$

$$\frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Hipotenusa}}=\frac{4}{5}=\frac{8}{10}=\frac{12}{15}=0.8 \qquad \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Adyacente}}=\frac{5}{4}=\frac{10}{8}=\frac{15}{12}=1.25$$

$$\frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Cateto Adyacente}}=\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{9}{12}=0.75 \qquad \frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Cateto Opuesto}}=\frac{4}{3}=\frac{8}{6}=\frac{12}{9}=1.3333$$

Lo importante a destacar es que el ángulo en todos los casos es el mismo. Este hecho es importante ya que permite relacionar a los ángulos con la razón de la proporción de los lados. Esta relación presenta la propiedad de *unicidad* y la propiedad de *completitud* (para cada par de lados homólogos existe siempre un único valor (razón) relacionado con una determinada [existe y es única] amplitud angular), por lo tanto, se establece una función, a las que llamaremos trigonométrica.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Si dividimos:	llamaremos a esta función:	
$\frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$	**Seno** y la denotaremos por Sen(α)	$Sen(\alpha)=\frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$
$\frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$	**Coseno** y la denotaremos por Cos(α)	$Cos(\alpha)=\frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$
$\frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Cateto Adyacente}}$	**Tangente** y la denotaremos por Tan(α)	$Tan(\alpha)=\frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Cateto Adyacente}}$
$\frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Cateto Opuesto}}$	**Cotangente** y la denotaremos por Cot(α)	$Cot(\alpha)=\frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Cateto Opuesto}}$
$\frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Adyacente}}$	**Secante** y la denotaremos por Sec(α)	$Sec(\alpha)=\frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Adyacente}}$
$\frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Opuesto}}$	**Cosecante** y la denotaremos por Csc(α)	$Csc(\alpha)=\frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Opuesto}}$

NOTA. *Las funciones Seno y Cosecante son inversas. También son inversas las funciones Coseno y Secante. Finalmente son inversas las funciones Tangente con Cotangente.*

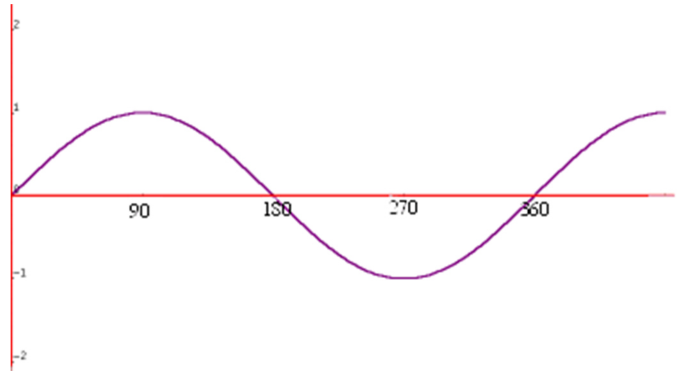
Esto es: $\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$; $\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$; $\operatorname{cotg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

Las funciones trigonométricas son funciones periódicas, repiten el valor de imagen cada 360º. De esa manera tenemos que: cos 60º = cos 420º = 0,5

Grafiquemos, mediante tablas, las siguientes funciones tomando valores angulares desde 0º hasta 360º. Para facilitar el trabajo tomemos ángulos a intervalos de 45º:

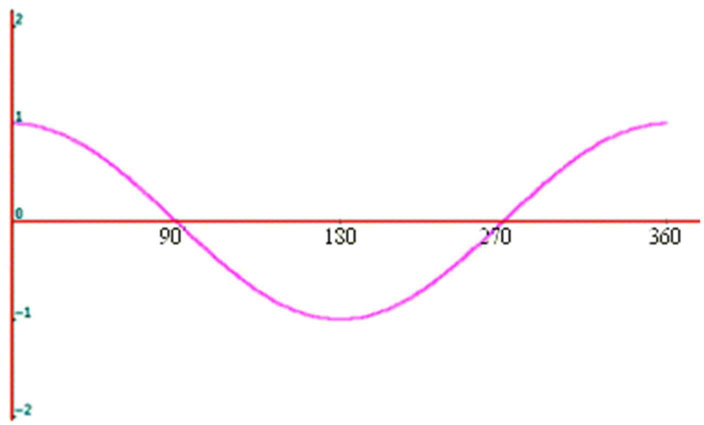
FUNCIÓN SENO:

α	sen α
0	0
45	0,71
90	1
135	0,71
180	0
225	- 0,71
270	-1
315	- 0,71
360	0



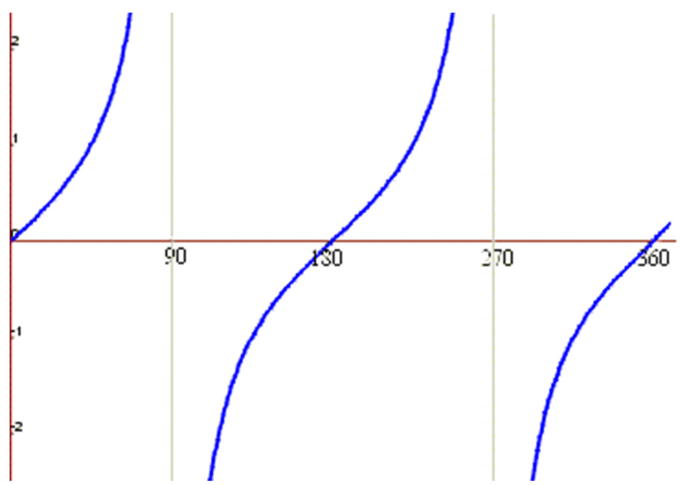
FUNCIÓN COSENO:

α	cos α
0	1
45	0,71
90	0
135	-0,71
180	-1
225	0,71
270	0
315	0,71
360	1



FUNCIÓN TANGENTE:

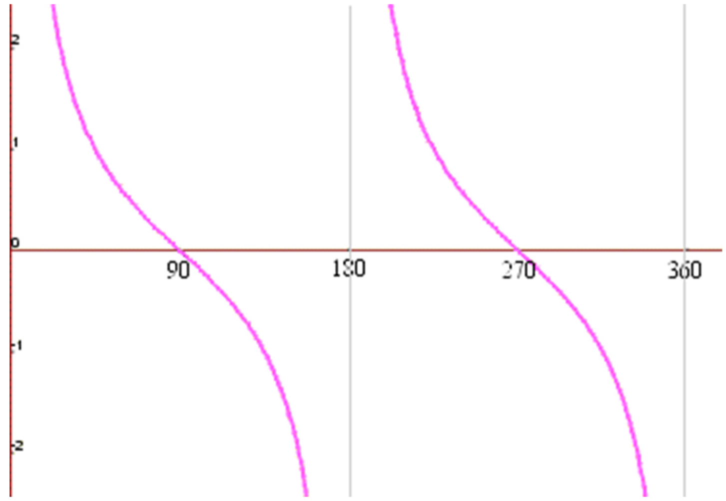
α	tg α
0	0
45	1
90	////
135	- 1
180	0
225	1
270	////
315	- 1
360	0



//// Significa que no se puede calcular el valor de la función, el resultado no existe (asíntota).

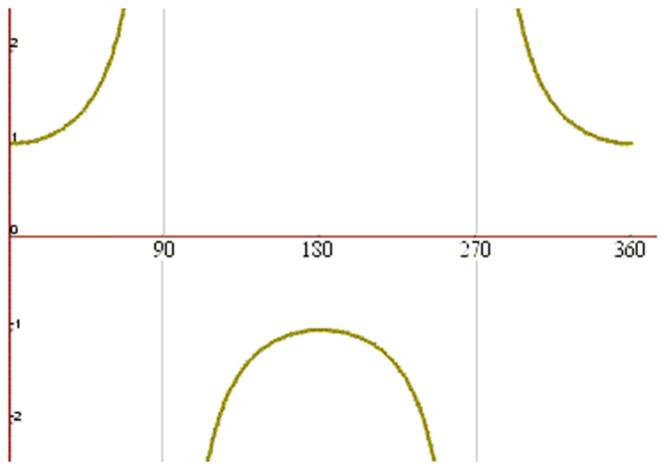
FUNCIÓN COTANGENTE:

α	Cotg α
0	////
45	- 1
90	0
135	1
180	////
225	- 1
270	0
315	////
360	- 1



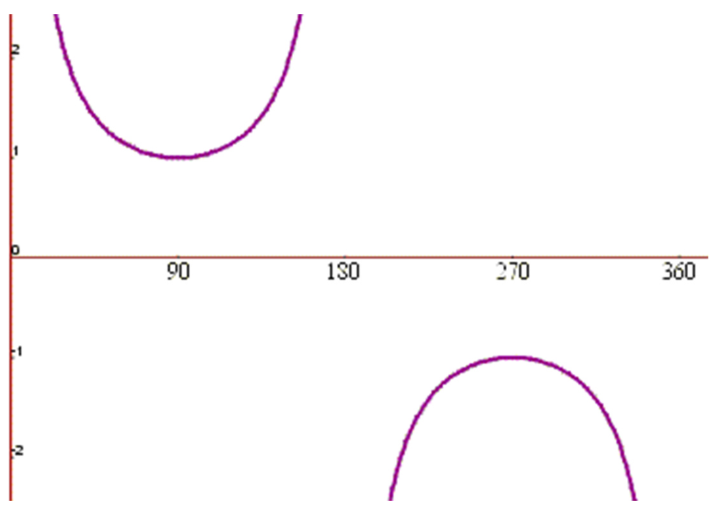
FUNCIÓN SECANTE:

α	sec α
0	1
45	1,41
90	////
135	-1,41
180	-1
225	1,41
270	////
315	1,41
360	1



FUNCIÓN COSECANTE:

α	Cosec α
0	////
45	1,41
90	1
135	1,41
180	////
225	- 1,41
270	-1
315	- 1,41
360	////



PARÁMETROS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Una función periódica es aquella que cumple que: $f(x) = f(x + p)$ donde P es el periodo diferente de cero. En general, una función trigonométrica presenta tres parámetros fundamentales: Amplitud (A) Frecuencia k y Fase $(\alpha)^*$. La primera es la que cambia el tamaño de la función, la segunda modifica el grado de repetición, y la última determina el desplazamiento de la función. Por ejemplo, específicamente para la función seno se tiene: $f(x) = A \cdot sen\ (kx + \alpha)$. Cabe señalar que un signo (+) en la fase, implica que la función se adelante (o sea, se corre a la izquierda) y un signo (−) en la fase implica que la función se atrase (o sea, se corre a la derecha).

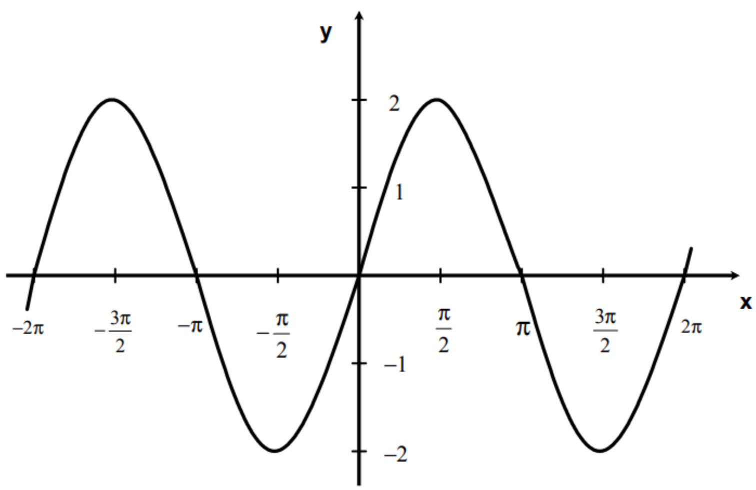
***En el caso que la amplitud sea uno, k sea cero, que no exista defasamiento y sólo se sume una constante c, la forma de la gráfica no cambia, sólo se desplaza c unidades (dependiendo de su signo) sobre el eje y.**

Ejemplo.

Trazar las gráficas de las siguientes funciones:

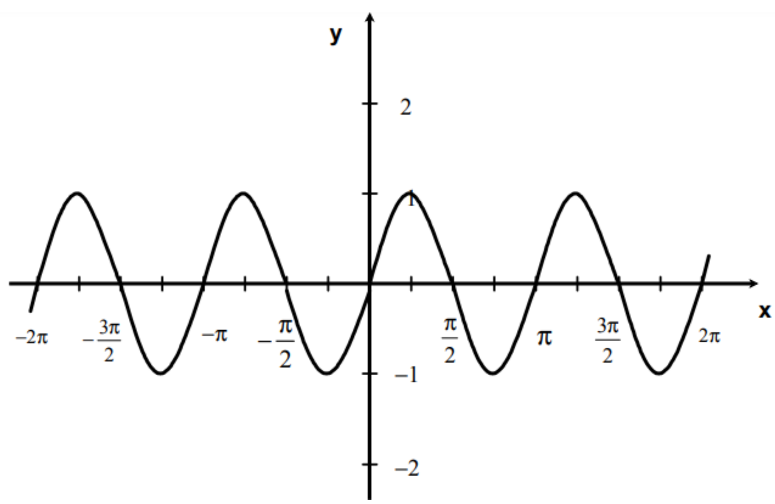
a) $f(x) = 2 \cdot \text{sen}\,(x)$

Solución. Se aprecia como en la gráfica la amplitud es el doble (dos veces más grande) que la función $f(x) = sen\ x$, sin embargo, la frecuencia y la fase no cambian



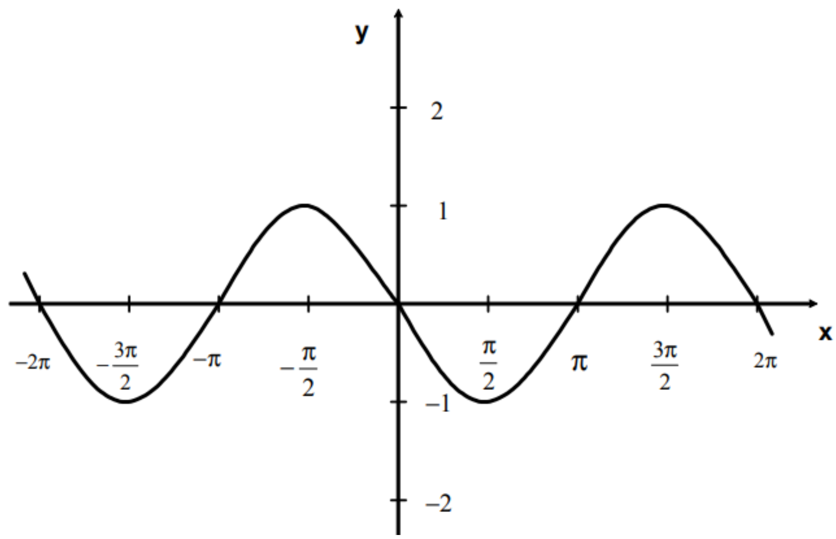
b) $f(x) = \text{sen}\,(2x)$

Solución. En este caso, en la gráfica la frecuencia es del doble (se repite más), sin embargo, la amplitud y la fase no cambian.



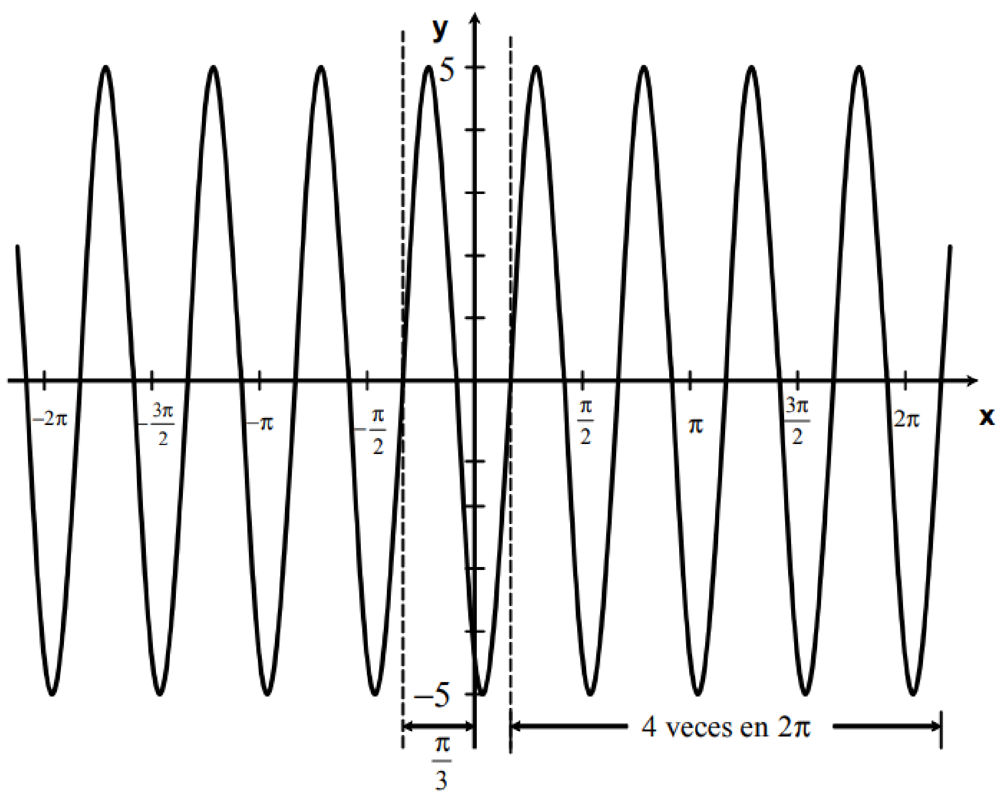
c) $f(x) = \text{sen}\,(x+\pi)$

Solución. La gráfica muestra como la función se adelanta π unidades (por el signo +), sin embargo, la amplitud y la frecuencia no cambian



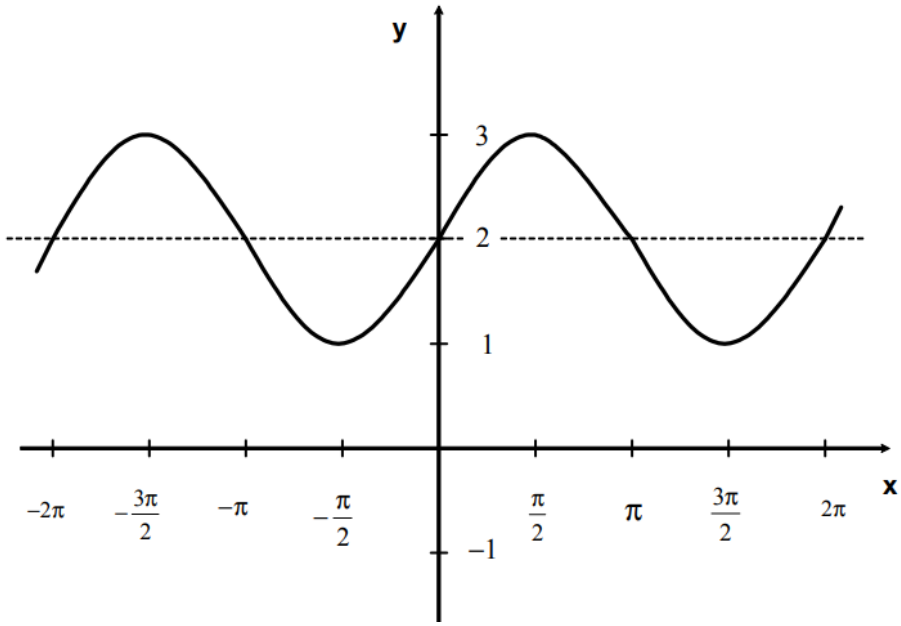
d) $f(x) = 5\text{sen}\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$

Solución. Aquí se modifican todos los parámetros: la gráfica tiene una amplitud de 5 (es muy grande), tiene una frecuencia de 4 (se repite más) y se atrasa $\frac{\pi}{3}$ unidades (por el signo −).



e) $f(x) = 2 + \text{sen}\,(x)$

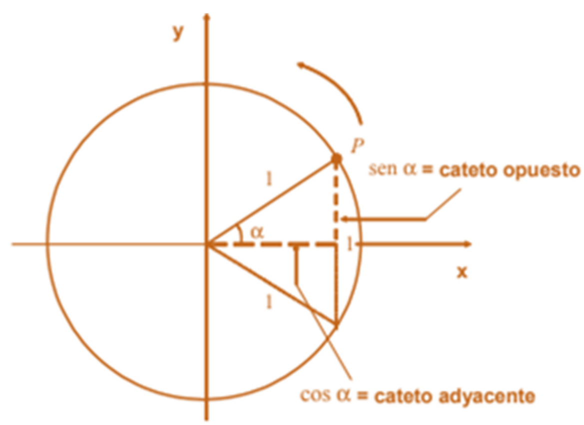
Solución. En este caso no se modifica ningún parámetro: la gráfica es igual a la función *f (x) = sen (x)*, sólo que se desplaza 2 unidades hacia arriba.



RECORDANDO. . .

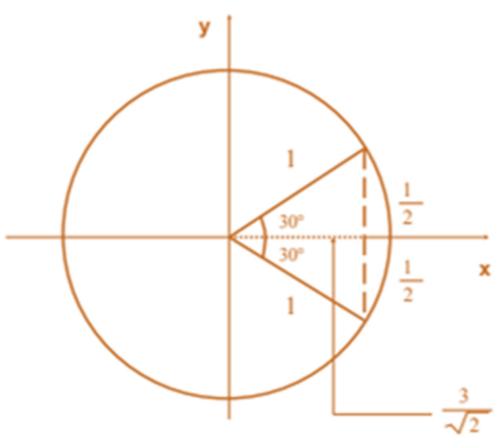
CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

Se llama así a una circunferencia de radio uno y con el centro en el origen de un sistema coordenado. Se puede considerar que el punto *P* que se utiliza para calcular las razones trigonométricas es el de intersección de uno de los vértices un triángulo equilátero unitario con el círculo trigonométrico cuyo centro coincide con otro de los vértices del triángulo. Esta consideración permite determinar el comportamiento de los segmentos en el plano que representan gráficamente las razones seno y coseno, tal y como se muestra en la siguiente figura de la derecha:



VALORES NOTABLES DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

En la figura anterior, al mover el ángulo en la dirección mostrada, los segmentos verticales representan las razones seno y los horizontales las razones coseno. Estos valores dependen de la orientación de los segmentos, por lo que ellos determinan el signo de estas razones. Además, debido a que la tangente es igual al cociente del seno entre el coseno, que la cotangente, la secante y la cosecante son los recíprocos de la tangente, coseno y seno respectivamente, con saber la magnitud y signo de estas últimas se pueden obtener los valores de las primeras. Los valores notables de las funciones trigonométricas se obtienen a partir de sus definiciones considerando los valores de los catetos y de la hipotenusa. Por ejemplo, para calcular los valores para 30° se puede construir la figura de la izquierda.



Teniendo en cuenta que se forma un triángulo equilátero unitario en el triángulo rectángulo, el valor de la hipotenusa es uno, el del cateto opuesto es su mitad y, aplicando el teorema de Pitágoras, se obtiene que el valor del cateto adyacente que es $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Por lo tanto, el valor del seno de 30° es $\frac{1}{2}$ el valor del coseno de 30° e $\frac{\sqrt{3}}{2}$ y, en consecuencia: $\tan 30° = \frac{\text{sen } 30°}{\cos 30°} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Aplicando las expresiones $\cot x = \frac{\cos x}{\text{sen } x}$, $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ y $\csc x = \frac{1}{\text{sen } x}$ se obtienen los valores respectivos.

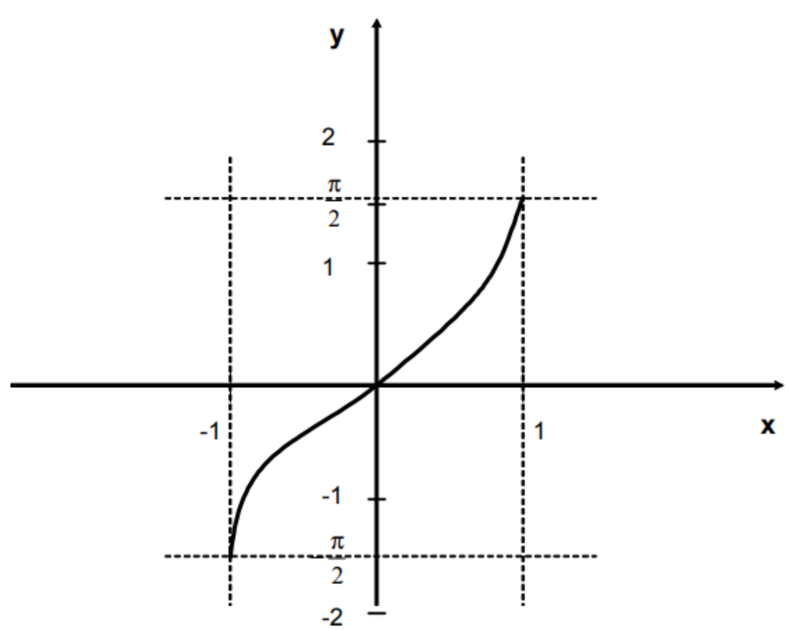
La tabla siguiente condensa estas cifras, además de los valores más notables de las funciones trigonométricas:

Función	Grados	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
	Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\text{sen } x$		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos x$		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\tan x$		0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\infty$	0
$\cot x$		∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	$-\infty$	0	∞
$\sec x$		1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-1	$-\infty$	1
$\csc x$		∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	$-\infty$	-1	∞

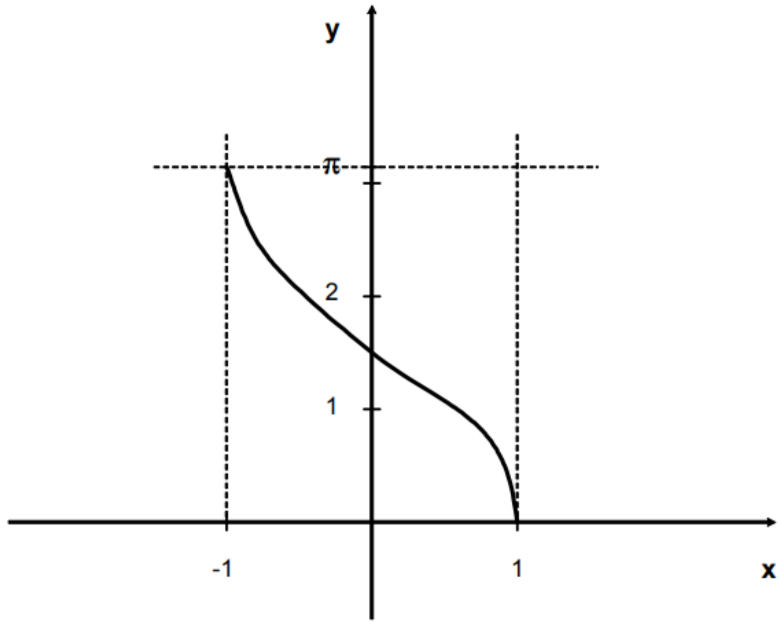
GRÁFICA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Las funciones trigonométricas no son inyectivas, esto significa que para un cierto valor de la imagen existe un número infinito de valores de x. Esto significa que estas funciones no tienen inversa, sin embargo, pueden tenerla si se consideran ciertos intervalos donde cumplan con la definición de función y cuya tabulación para cada una se deduce a partir de los valores notables (de las funciones trigonométricas). Esto se muestra a continuación:

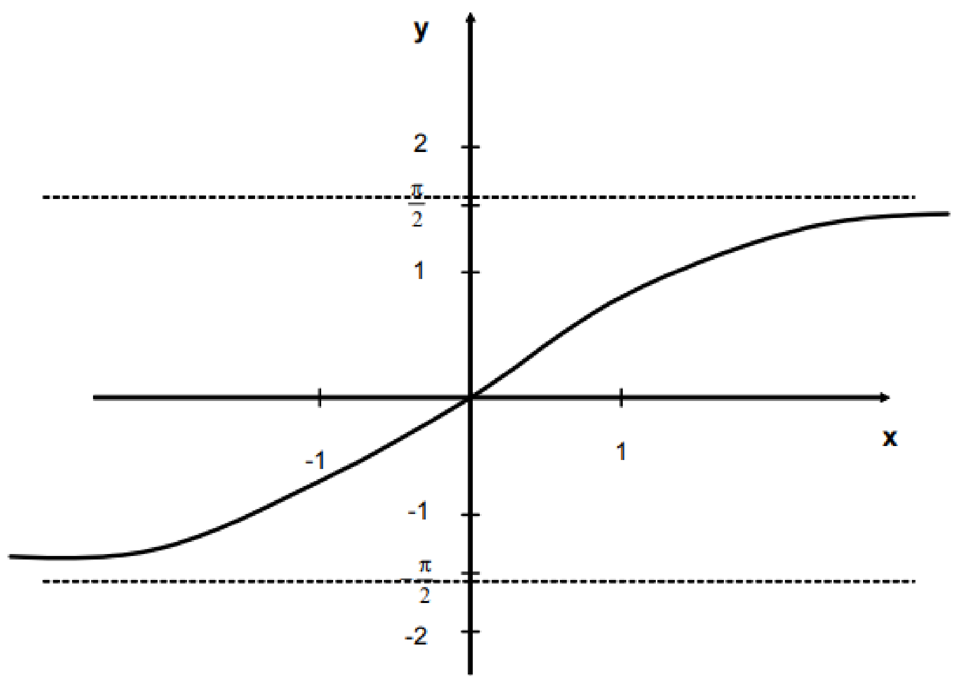
- Función $f(x) = \text{sen}^{-1} x$. Su dominio es $[-1,1]$ y su imagen es $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.



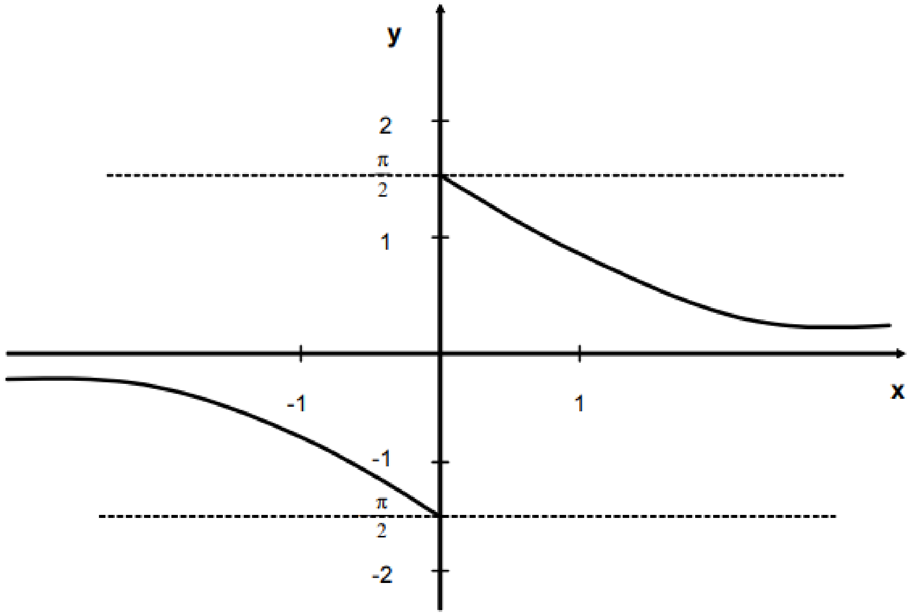
- Función $f(x)=\cos^{-1}x$. Su dominio es $[-1,1]$ y su imagen es $[0,\pi]$.



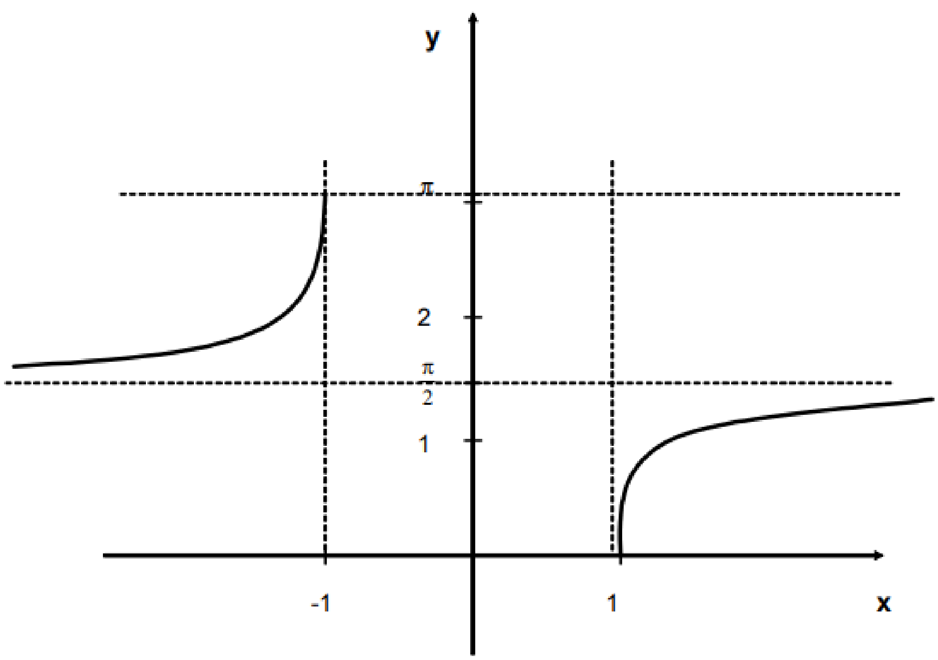
- Función $f(x)=\tan^{-1}x$. Su dominio es $(-\infty,\infty)$ y su imagen es $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.



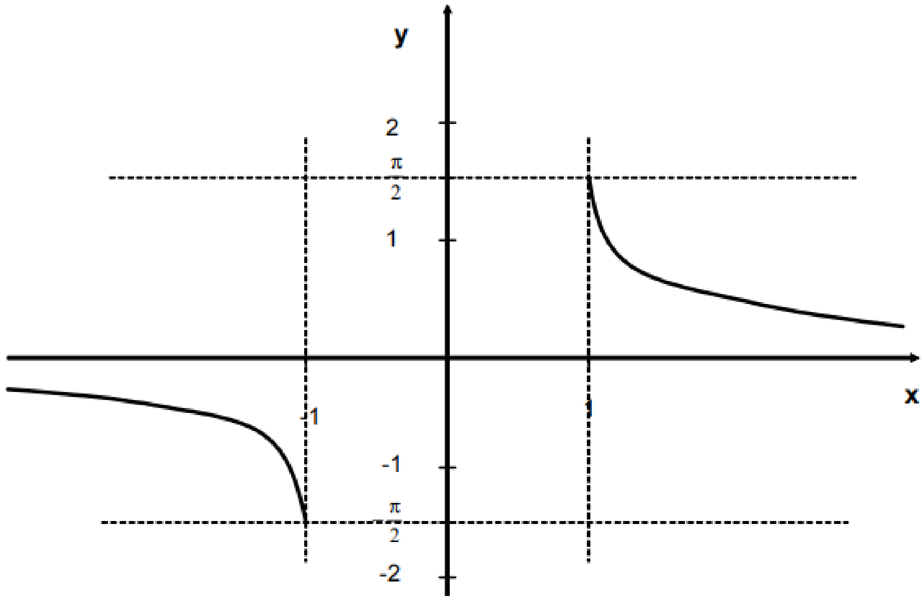
- Función $f(x)=\cot^{-1}x$. Su dominio es $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ y su imagen es $\left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$.



- Función $f(x)=\sec^{-1}x$. Su dominio es $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$ y su imagen es $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$.



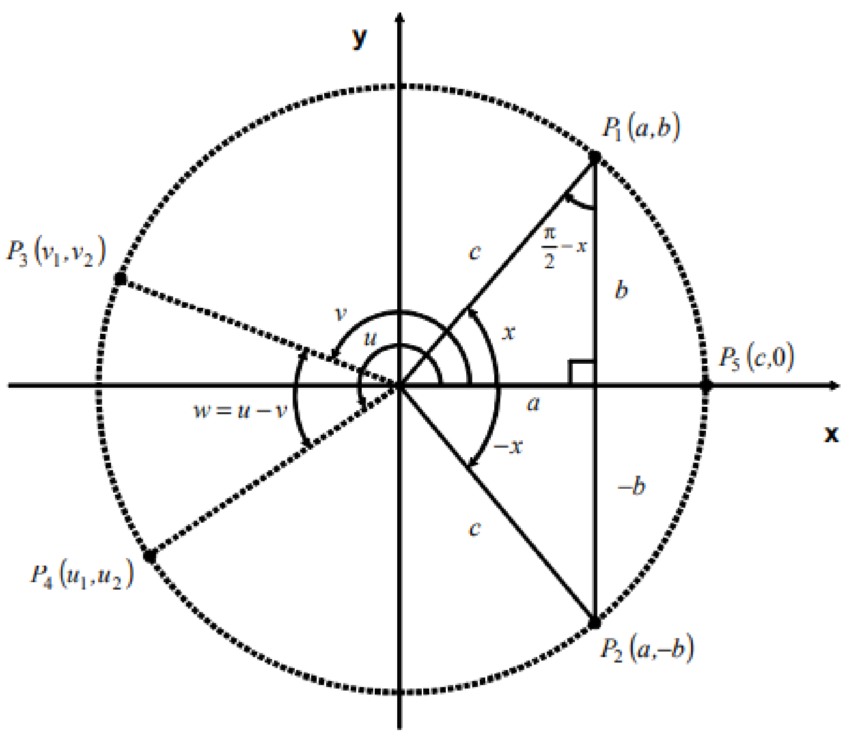
- Función $f(x)=\csc^{-1}x$. Su dominio es $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$ y su imagen es $\left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$.



IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Se han mencionado algunas de las identidades trigonométricas, sin embargo, es conveniente hacer un sumario para tener una mejor referencia. No es necesario aprenderse todas las identidades de memoria, por ello, se mencionan por grupos de importancia.

Considérese la siguiente figura:



IDENTIDADES PRINCIPALES

a) Relaciones inversas:

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

Demostraciones:

Multiplicando por $\frac{1}{c}$ en la definición de tangente: $\tan x = \frac{b}{a} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

Nota.

Utilizando con reiteración una o más fórmulas del grupo c), conocidas como fórmulas de reducción, es posible calcular el seno de "*x*" y el coseno de "*x*", para cualquier valor de "*x*", en función del seno y del coseno de ángulos entre 0° y 90°. Utilizando las fórmulas de los grupos a) se pueden calcular los valores de la tangente, cotangente, secante y cosecante de "*x*" en función del seno y del coseno. Por tanto, es suficiente tabular los valores del seno y el coseno de "*x*" para valores de *x* entre 0° y 90°. En la práctica, para evitar cálculos tediosos, se suelen también tabular las otras cuatro funciones para los mismos valores de "*x*". Sin embargo, desde la popularización de las calculadoras y las computadoras, las tablas de funciones trigonométricas han caído en desuso.

Multiplicando por $\frac{1}{c}$ en la definición de cotangente: $\cot x = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

Aplicando el recíproco en la definición de secante: $\sec x = \frac{c}{a} = \frac{1}{\frac{a}{c}} = \frac{1}{\cos x}$

Aplicando el recíproco en la definición de cosecante: $\csc x = \frac{c}{b} = \frac{1}{\frac{b}{c}} = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$

b) Identidad pitagórica:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

Demostración: Si en la expresión del teorema de Pitágoras se divide cada término entre c^2 se tiene:

$$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} \Rightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow (\operatorname{sen} x)^2 + (\cos x)^2 = 1 \quad \therefore \quad \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

c) Identidades expresando funciones trigonométricas en términos de sus complementos:

$$\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \qquad \operatorname{sen} x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \qquad \cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \qquad \csc x = \sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \qquad \sec x = \csc\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Demostraciones: Si en el triángulo de la figura, el ángulo en el cual se aplican las funciones trigonométricas es $\frac{\pi}{2}-x$, entonces se tiene que el cateto opuesto y el cateto adyacente se intercambian, por lo tanto, se tiene que:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{a}{c}=\cos x, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{b}{c}=\operatorname{sen} x, \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{b}{a}=\cot x$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{a}{b}=\tan x, \qquad \sec\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{c}{b}=\csc x, \qquad \csc\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{c}{a}=\sec x$$

d) Periodicidad de funciones trigonométricas. El seno el coseno, la secante y la cosecante tienen periodos de 2π, mientras que la tangente y la cotangente tienen un periodo de π.

$$\operatorname{sen}(x+2\pi)=\operatorname{sen} x \qquad \cos(x+2\pi)=\cos x \qquad \tan(x+\pi)=\tan x$$

$$\cot(x+\pi)=\cot x \qquad \sec(x+2\pi)=\sec x \qquad \csc(x+2\pi)=\csc x$$

Demostraciones: En las gráficas de las funciones $y=\operatorname{sen} x$ y $y=\cos x$ se aprecia como los valores se repiten cada 2π radianes, así que, al aplicar sus respectivas identidades recíprocas, las funciones $y=\csc x$ y $y=\sec x$ también presentan esa misma periodicidad. Por su parte, en la gráfica de la función $y=\tan x$ se muestra como los valores se repiten cada π radianes, así que, al aplicar su identidad recíproca, la función $y=\cot x$ también posee esa misma periodicidad.

e) Identidades para ángulos negativos. El seno, la tangente, la cotangente y la cosecante son funciones impares, es decir que cumplen con *f (−x) = − f (x)*. Por su parte, el coseno y la secante son funciones pares, es decir cumplen con *f (x) = f (−x)*.

$$\operatorname{sen}(-x)=-\operatorname{sen} x \qquad \cos(-x)=\cos x \qquad \tan(-x)=-\tan x$$

$$\cot(-x)=-\cot x \qquad \sec(-x)=\sec x \qquad \csc(-x)=-\csc x$$

f) Identidades trigonométricas de dos ángulos:

$$\operatorname{sen}(x+y)=\operatorname{sen} x\cdot\cos y+\operatorname{sen} y\cdot\cos x$$

$$\cos(x+y)=\cos x\cdot\cos y-\operatorname{sen} x\cdot\operatorname{sen} y$$

$$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\cdot\tan y}$$

$$\operatorname{sen}(x-y)=\operatorname{sen} x\cdot\cos y-\operatorname{sen} y\cdot\cos x$$

$$\cos(x-y)=\cos x\cdot\cos y+\operatorname{sen} x\cdot\operatorname{sen} y$$

$$\tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\cdot\tan y}$$

Demostraciones: Sean u y v dos números reales cualesquiera expresados en radianes y su diferencia se establece como $w = u - v$. Si los puntos de los lados terminales de los ángulos indicados en una circunferencia unitaria *(c = 1)* son respectivamente $P_4(u_1,u_2)$, $P_3(v_1,v_2)$, entonces, por definición se tiene:

$$\cos u=u_1, \quad \cos v=v_1 \quad \cos(u-v)=w_1$$

$$\operatorname{sen} u=u_2, \quad \operatorname{sen} v=v_2 \quad \operatorname{sen}(u-v)=w_2$$

Se aprecia que la distancia entre P5 y P1 debe ser igual a la distancia entre P3 y P4 porque los ángulos miden lo mismo.

Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$\sqrt{(w_1-1)^2+(w_2-0)^2}=\sqrt{(u_1-v_1)^2+(u_2-v_2)^2}$$

elevando al cuadrado y simplificando las expresiones de los radicales:

$$w_1^{\;2} - 2w_1 + 1 + w_2^{\;2} = u_1^{\;2} - 2u_1v_1 + v_1^{\;2} + u_2^{\;2} - 2u_2v_2 + v_2^{\;2}$$

Por ser una circunferencia unitaria, se cumple que $w_1^{\;2} + w_2^{\;2} = u_1^{\;2} + u_2^{\;2} = v_1^{\;2} + v_2^{\;2} = 1$, entonces:

$2 - 2w_1 = 2 - 2u_1v_1 - 2u_2v_2 \quad \Rightarrow \quad w_1 = u_1v_1 + u_2v_2$, así que sustituyendo se tiene:

$\cos(u - v) = \cos u \cdot \cos v + \operatorname{sen} u \cdot \operatorname{sen} v$ si se renombra a las variables como:

$u = x$ y $v = y$, se llega a: $\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y$

Ahora, si se hace que $y = -y$ y se recuerda que $\operatorname{sen}(-y) = -\operatorname{sen} y$ y $\cos(-y) = \cos y$, entonces:

$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos(-y) + \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}(-y) \quad \Rightarrow \quad \cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y$

Por otra parte, aplicando la identidad de complemento para el coseno:

$$\operatorname{sen}(x + y) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (x + y)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - y\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \cos y + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \operatorname{sen} y$$

Reduciendo:

$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cdot \cos y + \operatorname{sen} y \cdot \cos x$$

Ahora, si se hace que $y = -y$ y se recuerda que $\operatorname{sen}(-y) = -\operatorname{sen} y$ y $\cos(-y) = \cos y$, entonces:

$\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen} x \cdot \cos(-y) + \operatorname{sen}(-y) \cdot \cos x \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cdot \cos y - \operatorname{sen} y \cdot \cos x$

Por otra parte, aplicando la identidad de la tangente:

$$\tan(x + y) = \frac{\operatorname{sen}(x + y)}{\cos(x + y)} = \frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos y + \operatorname{sen} y \cdot \cos x}{\cos x \cdot \cos y - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y}$$

Si se divide el numerador y el denominador entre $\cos x \cdot \cos y \neq 0$:

$$\tan(x + y) = \frac{\operatorname{sen}(x + y)}{\cos(x + y)} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \dfrac{\cos y}{\cos y} + \dfrac{\operatorname{sen} y}{\cos x} \cdot \dfrac{\cos x}{\cos y}}{\dfrac{\cos x}{\cos x} \cdot \dfrac{\cos y}{\cos y} - \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \dfrac{\operatorname{sen} y}{\cos y}} = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$$

Ahora, si se hace que $y = -y$ y se recuerda que $\tan(-y) = -\tan y$, entonces:

$$\tan(x - y) = \frac{\tan x + \tan(-y)}{1 - \tan x \cdot \tan(-y)} = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$$

g) Identidades de doble ángulo:

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2 \cdot \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \cdot \operatorname{sen}^2 x$$

$$\tan 2x = \frac{2 \cdot \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

Demostraciones:

Si se hace $y = x$ en la identidad $\text{sen}\,(x+y) = \text{sen}\,x \cdot \cos\,y + \text{sen}\,y \cdot \cos\,x$, se tiene:

$\text{sen}\,(x+x) = \text{sen}\,2x = \text{sen}\,x \cdot \cos\,x + \text{sen}\,x \cdot \cos\,x = 2\text{sen}\,x \cdot \cos\,x$

Si se hace $y = x$ en la identidad $\cos\,(x+y) = \cos\,x \cdot \cos\,y - \text{sen}\,x \cdot \text{sen}\,y$, se tiene:

$\cos\,(x+x) = \cos\,2x = \cos\,x \cdot \cos\,x - \text{sen}\,x \cdot \text{sen}\,x = \cos^2\,x - \text{sen}^2\,x$

pero además se sabe que: $\text{sen}\,^2x + \cos^2\,x = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos\,^2x - 1 = -\text{sen}^2\,x$

por lo tanto: $\cos\,2x = \cos^2\,x - \text{sen}^2\,x = \cos^2\,x + \cos^2\,x - 1 = 2\cos^2\,x - 1$

pero también se sabe que: $\text{sen}\,^2x + \cos^2\,x = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos\,^2x = 1 - \text{sen}^2\,x$

por lo tanto: $\cos\,2x = 2\cos^2\,x - 1 = 2(1 - \text{sen}^2\,x) - 1 = 2 - 2\text{sen}^2\,x - 1 = 1 - 2\text{sen}^2\,x$

Si se hace $y = x$ en la identidad $\tan\,(x+y) = \dfrac{\tan\,x + \tan\,y}{1 - \tan\,x \cdot \tan\,y}$, se tiene:

$$\tan\,2x = \frac{\tan\,x + \tan\,x}{1 - \tan\,x \cdot \tan\,x} = \frac{2\tan\,x}{1 - \tan^2\,x}$$

h) Identidades trigonométricas que involucran cuadrados:

$$\sec^2\,x = 1 + \tan^2 x \qquad\qquad \csc^2\,x = 1 + \cot^2 x$$

Demostraciones:

Si en la identidad $\text{sen}^2\,x \cdot \cos^2\,x = 1$, se divide cada término entre $\cos^2\,x$:

$$\frac{\text{sen}^2\,x}{\cos^2\,x} + \frac{\cos^2\,x}{\cos^2\,x} = \frac{1}{\cos^2\,x} \quad \Rightarrow \quad \tan^2\,x + 1 = \sec^2\,x \quad \Rightarrow \quad \sec^2\,x = 1 + \tan^2\,x$$

Si en la identidad $\text{sen}^2\,x \cdot \cos^2\,x = 1$, se divide cada término entre $\text{sen}^2\,x$:

$$\frac{\text{sen}^2\,x}{\text{sen}^2\,x} + \frac{\cos^2\,x}{\text{sen}^2\,x} = \frac{1}{\text{sen}^2\,x} \quad \Rightarrow \quad 1 + \cot^2\,x = \csc^2\,x \quad \Rightarrow \quad \csc^2\,x = 1 + \cot^2\,x$$

i) Identidades que expresan funciones trigonométricas en términos de sus complementos:

$$\text{sen}\,(\pi - x) = \text{sen}\,x \qquad\qquad \cos\,(\pi - x) = -\cos\,x \qquad\qquad \tan\,(\pi - x) = \tan\,x$$

Demostraciones:

Si en la identidad $\text{sen}\,(x-y) = \text{sen}\,x \cdot \cos\,y - \text{sen}\,y \cdot \cos\,x$, se sustituye $x = \pi$ y $y = x$:

$\text{sen}\,(\pi - x) = \text{sen}\,\pi \cdot \cos\,x - \text{sen}\,x \cdot \cos\,\pi = 0 \cdot \cos\,x - \text{sen}\,x \cdot (-1) = \text{sen}\,x$

Si en la identidad $\cos\,(x-y) = \cos\,x \cdot \cos\,y + \text{sen}\,x \cdot \text{sen}\,y$, se sustituye $x = \pi$ y $y = x$:

$\cos\,(\pi - x) = \cos\,\pi \cdot \cos\,x + \text{sen}\,\pi \cdot \text{sen}\,x = -1 \cdot \cos\,x + (0) \cdot \text{sen}\,x = -\cos\,x$

Si en la identidad $\tan\,(x-y) = \dfrac{\tan\,x - \tan\,y}{1 + \tan\,x \cdot \tan\,y}$, se sustituye $x = \pi$ y $y = x$:

$$\tan\,(\pi - x) = \frac{\tan\,\pi + \tan\,x}{1 - \tan\,\pi \cdot \tan\,x} = \frac{0 + \tan\,x}{1 + \tan\,0 \cdot \tan\,x} = \frac{\tan\,x}{1} = \tan\,x$$

j) Identidades trigonométricas de medio ángulo:

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \qquad \cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \qquad \tan\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

Demostraciones:

Si en la identidad $\cos 2x = 1-2\operatorname{sen}^2 x$, se despeja $\operatorname{sen}^2 x$ se tiene que: $\operatorname{sen}^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$

ahora, si se sustituye $\frac{x}{2}$ por x y si se considera que está en un cuadrante cuyo signo es positivo:

$$\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

Si en la identidad $\cos 2x = 2\cos^2 x-1$, se despeja $\cos^2 x$ se tiene que: $\cos^2 x=\frac{1+2\cos 2x}{2}$

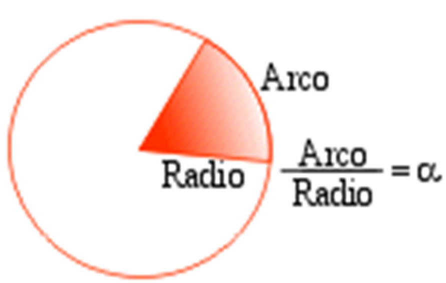
ahora, si se sustituye $\frac{x}{2}$ por x y si se considera que está en un cuadrante cuyo signo es positivo:

$$\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

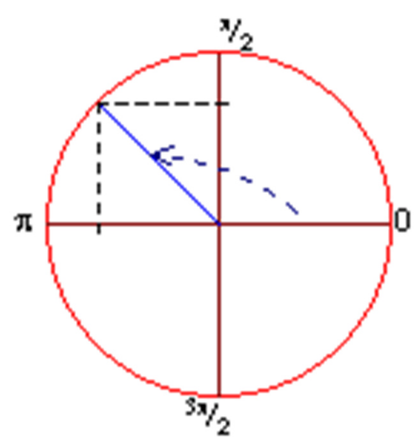
Si en la identidad $\tan x=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ se sustituye $\frac{x}{2}$ por x y si se considera que está en un cuadrante cuyo signo es positivo:

$$\tan\frac{x}{2}=\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

SISTEMA CIRCULAR DE MEDICIÓN DE ÁNGULOS



El sistema de medición de ángulos que solemos utilizar es el sexagesimal, divide a la circunferencia en seis partes de 60º cada una, obteniendo un giro completo de 360º. Cuando se quiso utilizar este sistema en física, para poder calcular el camino desarrollado por alguna partícula en trayectoria circular, se encontraron que el sistema sexagesimal no los ayudaba pues, matemáticamente, no está relacionado con el arco que describe el cuerpo al moverse.



De esa manera se "inventó" otro sistema angular, el sistema circular, donde la medida del ángulo se obtiene al dividir el arco y el radio de la circunferencia. En este sistema un ángulo llano (al dividir el arco por el radio) mide 3,14 (que es el valor aproximado de "π").

De esa manera un giro completo (que es lo mismo que dos ángulos llanos) mide 2π.

$$180^\circ=\pi \qquad ó \qquad 360^\circ=2\pi$$

En este caso la circunferencia queda dividida en cuatro partes iguales de 90º

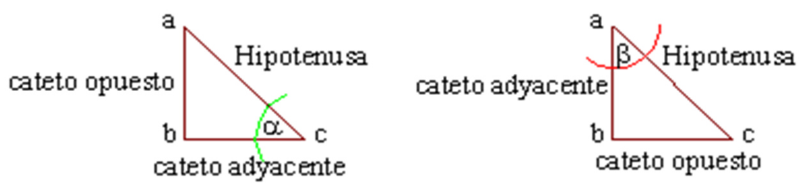
($\pi/2$) cada una, que va desde 0º hasta 360º (2π), a las que se denomina cuadrantes:

1er cuadrante: 0º a 90º
2do cuadrante: 90º a 180º
3er cuadrante: 180º a 270º
4to cuadrante: 270 a 360º

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS

Podemos desarrollas las funciones trigonométricas de ángulos complementarios mediante triángulos rectángulos, ya que los ángulos que no son rectos son complementarios entre, si:

$$\alpha + \beta = 90° \Rightarrow \beta = 90° - \alpha$$



$$\text{sen}\,\beta = \text{sen}(90° - \alpha) = \frac{\overline{bc}}{\overline{ac}} = \cos\alpha$$

$$\cos\beta = \cos(90° - \alpha) = \frac{\overline{ab}}{\overline{ac}} = \text{sen}\,\alpha$$

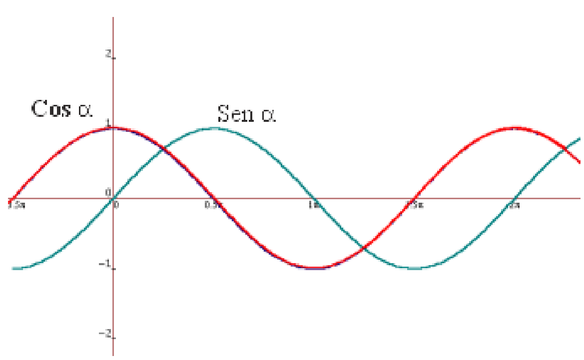
$$\text{tg}\,(90 - \alpha) = \text{cotg}\,\alpha$$

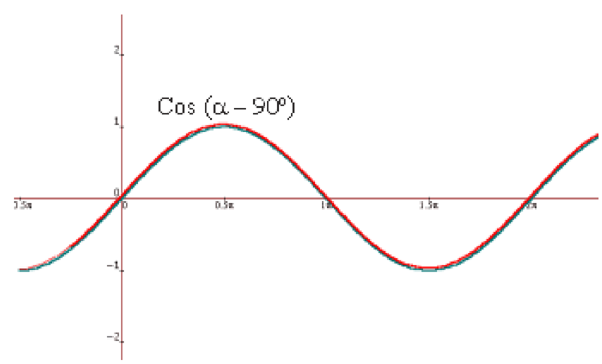
$$\text{cotg}\,(90 - \alpha) = \text{tg}\,\alpha$$

$$\sec\,(90 - \alpha) = \text{cosec}\,\alpha$$

$$\text{cosec}\,(90 - \alpha) = \sec\,\alpha$$

Las funciones trigonométricas de los ángulos complementarios son opuestas. En caso de los ángulos de $(90° - \alpha)$ los ángulos caen en el primer cuadrante y los signos son todos positivos.





FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS

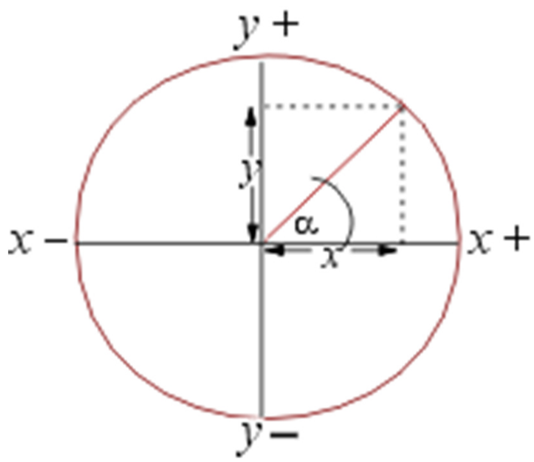
Los ángulos suplementarios suman entre, si: $180° : \alpha + \beta = 180° \Rightarrow \beta = 180° - \alpha$

En este caso las funciones quedan iguales sólo cambia el signo según el cuadrante que caiga: $sen\ (180° - \alpha) = sen\ \alpha.$

SIGNOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS SEGÚN EL CUADRANTE

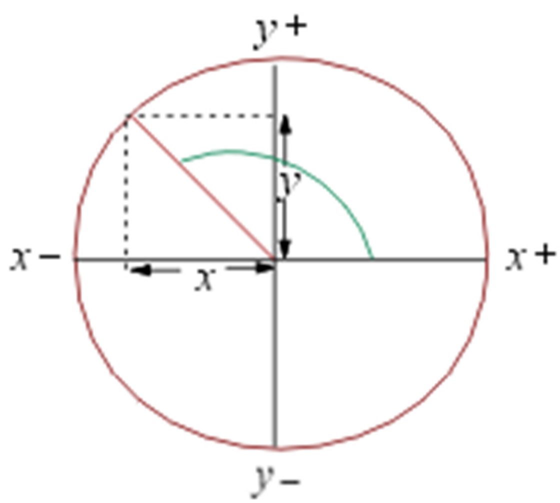
En el *primer cuadrante*, vemos que: el cateto adyacente se ubica sobre el eje *x*, así que lo denominaremos "*x*"; al cateto opuesto, que se ubica sobre el eje *y*, lo llamaremos "*y*". La hipotenusa, que es el radio de la circunferencia, la designaremos "r".

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{cat. op}}{\text{hip.}} = \frac{y}{r};\quad \cos\alpha = \frac{\text{cat. ady.}}{\text{hip.}} = \frac{x}{r};\quad \text{tg}\,\alpha = \frac{\text{cat. op}}{\text{cat. ady.}} = \frac{y}{x}$$



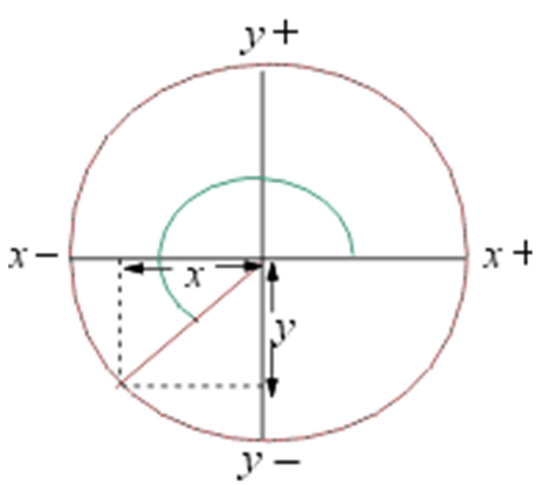
Ya que "*x*", "*y*", "r", son positivas, entonces, Todas las funciones trigonométricas en el primer cuadrante son positivas.

Sen	Csc	Tan	Cot	Cos	Sec
+	+	+	+	+	+



En el *segundo cuadrante*, el cateto adyacente cae sobre el eje negativo de las *x,* mientras que el cateto opuesto sigue sobre el eje positivo de las *y*. El radio (la hipotenusa) sigue siendo positiva en todos los cuadrantes. Por lo tanto: el Coseno, la Tangente y sus inversas (Secante y Cotangente) tienen resultados negativos.

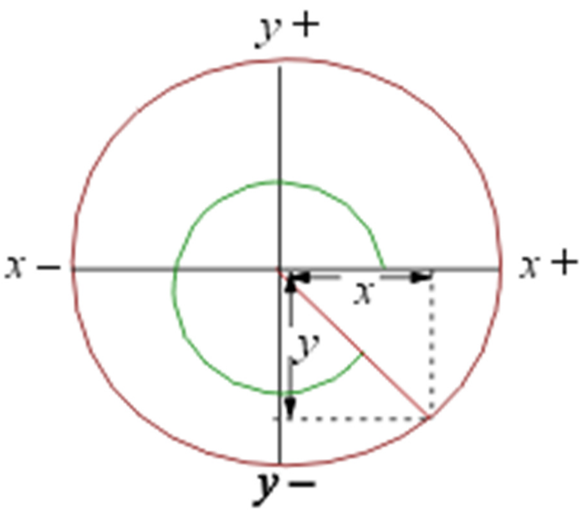
Sen	Csc	Tan	Cot	Cos	Sec
+	+	−	−	−	−



En el *tercer cuadrante*, tanto el cateto adyacente como el cateto opuesto tienen sus signos negativos, ya que caen sobre la parte negativa de los ejes. En este caso la Tangente (y su inversa, la Cotangente) resultan positivas:

(− : − = +)

Sen	Csc	Tan	Cot	Cos	Sec
−	−	+	+	−	−



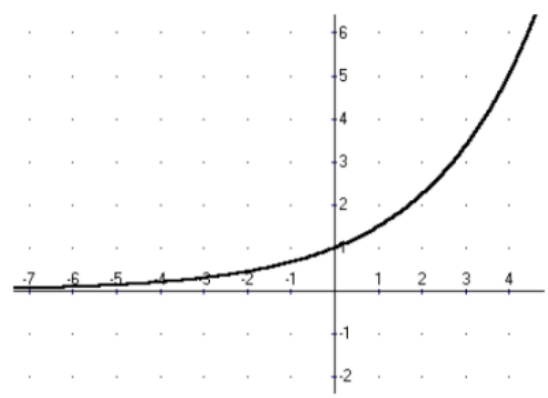
En el cuarto cuadrante, el cateto adyacente vuelve a estar sobre el eje positivo de las x, mientras que el cateto opuesto sigue sobre el eje negativo de las y. En este caso, las únicas funciones cuyo resultado será positivo son el Coseno y la Secante.

Sen	Csc	Tan	Cot	Cos	Sec
–	–	–	–	+	+

FUNCIÓN EXPONENCIA Y FUNCIÓN LOGARÍTICA

FUNCIÓN EXPONENCIAL

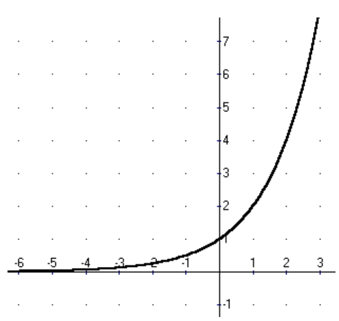
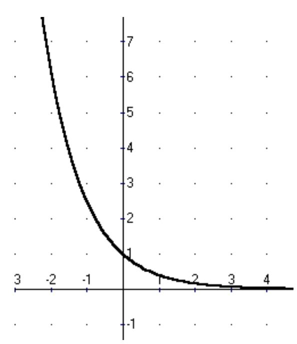
La función exponencial es de la forma $f(x) = a^x, tal\ que\ a > 0, 1\ a\ \neq x$ El valor a se llama base de la función exponencial.



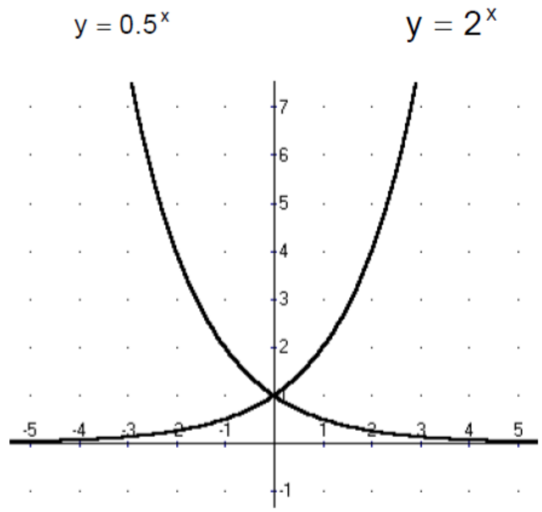
y = 1'5^x

Propiedades:

- El dominio es R.
- El recorrido es]0,+∞]
- La función es continua en R.
- $f(0) = 1$
- $Si\ f(x) = f(y), entonces\ x = y, es\ decir, si\ a^x = a^y, entonces\ x = y.$
- $f(x) \cdot f(y) = f(x + y)$

Si a >1 la función es creciente.	Si 0 < a < 1 la función es decreciente.
 y = 2^x	 y = 0.4^x

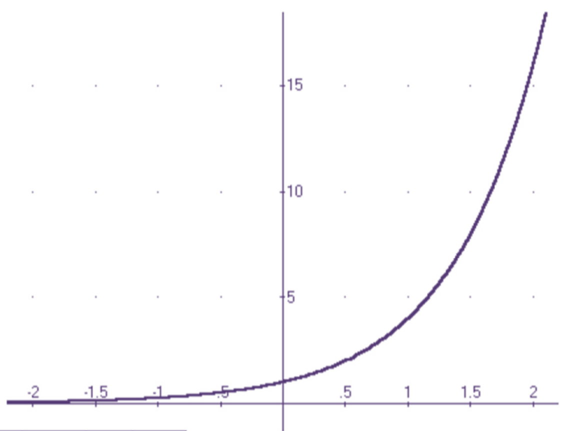
Las gráficas de las funciones $f(x) = a^x$, $g = \left(\frac{1}{a}\right)^2$ son simétricas respecto del eje de ordenadas OY.



EJERCICIO 01.

Estudia y representa la función $f(x) = 4^x$.

Es una función exponencial de base $a = 4$
El dominio es R
El recorrido es $]0,+\infty[$
Es una función creciente.
La función es continua en R



Construimos una tabla de valores de la función:

x	$-2,5$	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	0,5	1	1,5	2	2,5
y	0,03125	0,0625	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8	16	32

EJERCICIO 02.

Resuelve la ecuación exponencial: $3^{x-1} = 729$
Intentaremos que las dos partes de la ecuación sean dos potencias de la misma base:
$729 = 3^6$
$3^{x-1} = 3^6$
Igualando los exponentes:
$x - 1 = 6$
La solución de la ecuación es $x = 7$

Nota: para resolver ecuaciones donde no podamos obtener a las dos partes de la igualdad potencias de la misma base, se aplicarán logaritmos. Por ejemplo: $2x = 3$.

EJERCICIO 03.

Resuelve la ecuación exponencial: $3^{2x} - 3^{x+1} - 3^x = 45$
Para resolver este tipo de ecuaciones utilizaremos incógnitas auxiliares:
Efectuamos el cambio $y = 3^x$
Entonces: $3^{2x} = (3^x)^2 = y^2$, $3^{x+1} = 3^x \cdot 3 = 3y$

La ecuación inicial se transformaría en la siguiente:
$y^2 - 3y - y = 45$

Resolvamos la ecuación de segundo grado:
$y^2 - 4y - 45 = 0$, $\quad y = \frac{4 \pm \sqrt{16+180}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{196}}{2} = \frac{4 \pm 14}{2}$, $\quad y = 9$, $\quad y = -5$

Deshacemos el cambio:
$y = 3^x = 9$, entonces $3^x = 3^2$, igualando exponentes, $x = 2$
$y = 3^x = -5$, la ecuación $3^x = -5$ no tiene solución, la función exponencial siempre es positiva.

EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Con la ayuda de la calculadora, efectúa las siguientes operaciones:

a) $2^{1/3} =$
b) $2^{-2/5} =$
c) $2^{1'3} =$
d) $2^{-2'7} =$
e) $2^{\sqrt{3}} =$
f) $2^{-\sqrt{5}} =$
g) $2^{\pi} =$
h) $2^{-\pi} =$
i) $2^{2+\sqrt{2}} =$

2. La calculadora tiene dos funciones exponenciales $\boxed{10^x}$ $\boxed{e^x}$. Con la ayuda de la calculadora, efectúa las siguientes operaciones:

a) $10^{1'3} =$
b) $10^{-3'6} =$
c) $10^{5/4} =$
d) $10^{-7/3} =$
e) $10^{\sqrt{10}} =$
f) $10^{-\sqrt{3}} =$
g) $e^{2'3} =$
h) $e^{-1'6} =$
i) $e^{3/4} =$
j) $e^{-5/3} =$
k) $e^{\sqrt{2}} =$
l) $e^{-\sqrt{5}} =$

3. Estudia y representa las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2^x$
b) $g(x) = 3^x$
c) $h(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$
d) $m(x) = 2'5^x$
e) $n(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
f) $p(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
g) $q(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$
h) $r(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x$

4. Estudia y representa las siguientes funciones:

a) $f(x) = 10^x$
b) $g(x) = e^x$
c) $h(x) = 2 \cdot 10^x$
d) $m(x) = 5 \cdot e^x$
e) $n(x) = -3 \cdot 10^x$
f) $p(x) = -5 \cdot e^x$
g) $q(x) = 0'1^x$
h) $r(x) = 100^x$

5. La mayoría de las bacterias se reproducen por bipartición, es decir, una célula madre se divide en dos células hijas. Supongamos que un tipo de bacterias necesita 1 hora para duplicarse.

Completa la tabla siguiente.

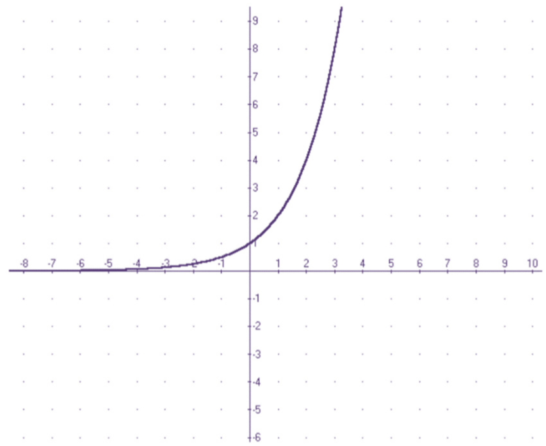
x(horas)	0	1	2	3	4	5	6	x
Y(bacterias)								

Define la función y represéntala gráficamente.

6. La presión atmosférica varía según la altura con la siguiente fórmula $P(x) = 0'9^x$, donde x es la altura en kilómetros y $P(x)$ la presión atmosférica en atmósferas.

Representa la función.

7. Dada la función $f(x)$ $f(x) = 2^x$



Sin utilizar tablas de valores dibuja las funciones:

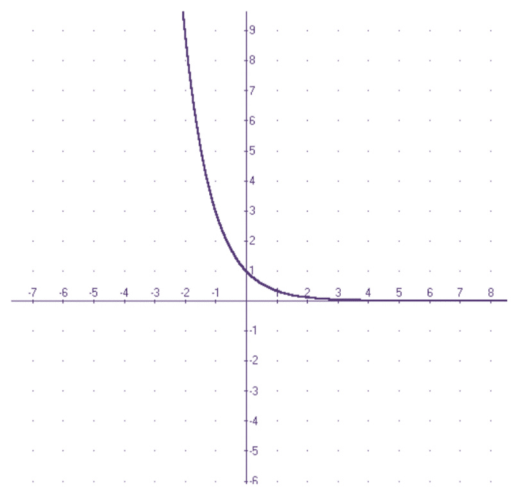
$g(x) = 2x + 3$

$h(x) = 2x - 4$

$m(x) = 2x + 2$

$n(x) = 2x - 1$

8. Dada la función $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$



Sin utilizar tablas de valores dibuja las funciones:

$g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 4$

$h(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 3$

$m(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$

$n(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$

9. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $7^{x+1} = 7^{3x+2}$
b) $5^{x+3} = 5$
c) $2^x = 1024$
d) $2^{3x+1} = 1$
e) $3^{5x} = 81$
f) $3^{2x-1} = \frac{1}{9}$
g) $3^x = \sqrt{3}$
h) $7^{x-1} = 49^{3x-2}$
i) $25^{2x} = 125^{x-1}$
j) $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 14$
k) $7^x + 7^{x+1} + 7^{x+2} = 2793$
l) $3^{x+1} + 3^{x+2} - 3^{x+3} = -5$
m) $3 \cdot 2^x - 5 \cdot 2^{x-2} = 14$
n) $2 \cdot 3^{x+3} + 4 \cdot 3^{x+4} = 14$
o) $3^{2x} - 3^{x+1} = 54$
p) $2^{2x+2} + 2^{x+3} = 320$
q) $4^x - 2^{x+1} - 3 \cdot 2^x = 24$
r) $9^x - 5 \cdot 3^{x+2} - 7 \cdot 3^x = 2349$

LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA

$$Sea\ a > 0, a \neq 1$$

Definimos logaritmo base a de x y lo representamos $log_a x$ al valor y $log_a\ xy = tal\ que: ay = x$, es decir, la operación inversa de la exponencial.

EJERCICIO 04.

Calcula $\log_2 8$, $\log_3\left(\frac{1}{81}\right)$, $\log_7 \sqrt[3]{49}$

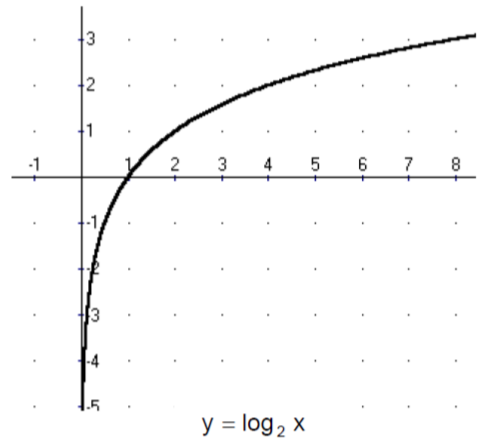
$\log_2 8 = y$, $2^y = 8$, $2^y = 2^3$, por tanto, $y = 3$. Entonces, $\log_2 8 = 3$

$\log_3\left(\frac{1}{81}\right) = y$, $3^y = \frac{1}{81}$, $3^y = 3^{-4}$, por tanto, $y = -4$. Entonces $\log_3\left(\frac{1}{81}\right) = -4$

$\log_7 \sqrt[3]{49} = y$, $7^y = \sqrt[3]{49}$, $7^y = 7^{2/3}$, por tanto, $y = \frac{2}{3}$. Entonces $\log_7 \sqrt[3]{49} = \frac{2}{3}$

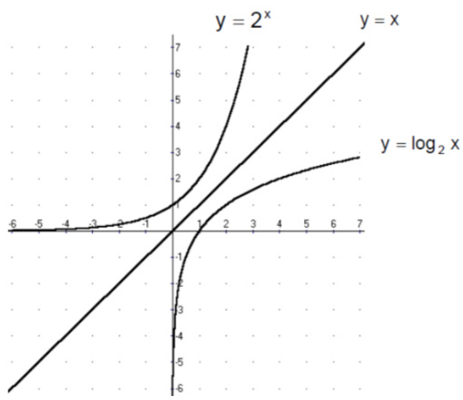
Función logarítmica:

A la función $f(x) = \log_a x$, $tal\ que\ a > 0, a \neq 1$ Se llama función logarítmica.



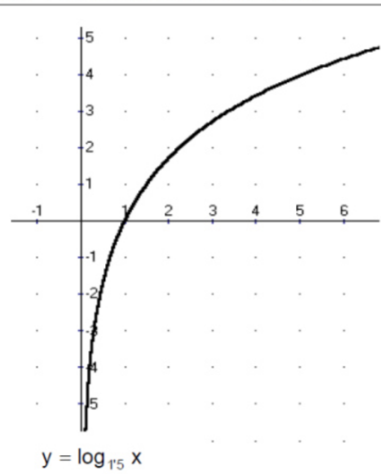
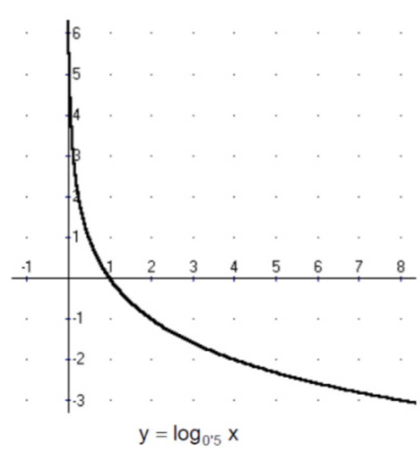
Propiedades del logaritmo y la función logarítmica:

- El dominio de la función logarítmica es $]0,+\infty]$
- El recorrido de la función logarítmica es R.
- La función es continua en $]0,+\infty]$
- $Si\ \log_a x = \log_a y, entoces, x = y$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a^p = p$

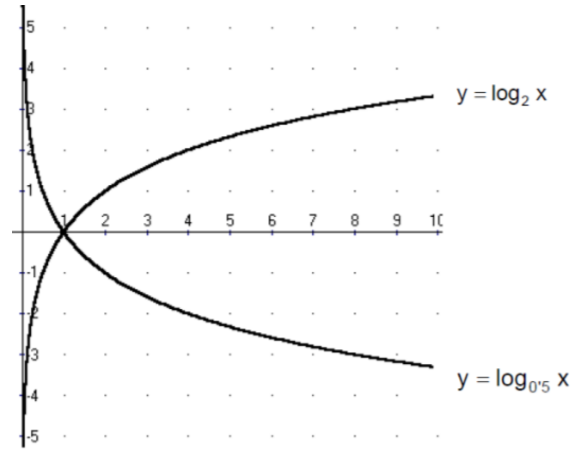


- $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a x^P = p * \log_a x$
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

La función $f(x) \log_a x =$, y la función $g(x) = a^x$ son inversas, por tanto, son simétricas respecto de la recta $y = x$.

Si $a > 1$ la función es creciente	Si $0 < a < 1$ la función es decreciente
	

Las funciones $f(x)\log_a x, g(x) = \log_{1/a} x$ son simétricas respecto del eje de abscisas OX.



USO DE LA CALCULADORA

La calculadora tiene dos funciones logarítmicas:

$\boxed{\text{log}}$ que son los logaritmos decimales o de base 10. Escribiremos $\log x = \log_{10} x$
$\boxed{\text{ln}}$ que son los logaritmos neperianos o de base e. Escribiremos $\ln x = \log_e x$

Calcula: log25, ln3

Con calculadoras antiguas:

Para calcular log25
Para calcular ln3

25	log	1.397940009
3	ln	1.098612289

Con calculadoras modernas:

Para calcular log25
Para calcular ln3

log	25	=	1.397940009
ln	3	=	1.098612289

EJERCICIO 5. Con la ayuda de la calculadora efectúa las siguientes operaciones:

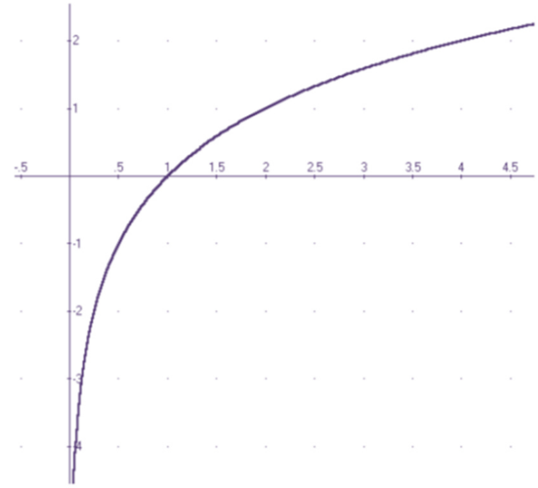
$\log_2 3$, $\log_3 2$.

Las calculadoras sólo tienen logaritmos decimales y neperianos. Para poder calcular logaritmos de otras bases efectuaremos el cambio de base:

$$\log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{0'4771}{0'3010} = 1'5850$$

$$\log_3 2 = \frac{\ln 2}{\ln 3} = \frac{0'6931}{1'0986} = 0'6309$$

EJERCICIO 6.



Estudia y representa la función $y = \log_2 x$

Es una función logarítmica de base 2.

Es una función creciente.

Con la ayuda de la calculadora construimos una tabla de valores:

x	0'25	0'5	1	1'5	2	2'5	3	3'5	4	4'5
y	−2	−1	0	0'58	1	1'32	1'58	1'81	2	2'17

EJERCICIO 7.

Resuelve la ecuación exponencial $2^x = 5$

5 no se puede poner como potencia de base 2, entonces calcularemos logaritmos decimales en las dos partes de la igualdad:

$$\log 2^x = \log 5$$

Apliquemos la propiedad del logaritmo de una potencia:

$$x \cdot \log 2 = \log 5$$

Despejamos la incógnita x:

$x = \frac{log5}{log2}$,con ayuda de la calculadora podemos aproximar el resultado: $x = \frac{log5}{log2} \approx 2'3219$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Sin utilizar calculadora efectúa las siguientes operaciones:

a) $\log_2 4 =$
b) $\log_9 729 =$
c) $\log 1000 =$
d) $\log_3 1 =$
e) $\log_{25} 5 =$
f) $\log_{16} 2 =$
g) $\log_2 \left(\frac{1}{8}\right) =$
h) $\log_5 \left(\frac{1}{125}\right) =$
i) $\log_3 \left(\frac{1}{3}\right) =$
j) $\log 0'001 =$
k) $\log_{1/3} \left(\frac{1}{243}\right) =$
l) $\log_3 \sqrt{27} =$
m) $\log_4 \sqrt{2} =$
n) $\log_5 \sqrt[4]{125} =$

Con la ayuda de la calculadora efectúa las operaciones del ejercicio anterior:

Representa las funciones siguientes:

a) $f(x) = \log x$
b) $g(x) = \ln x$
c) $h(x) = \log_{1'5} x$
d) $m(x) = \log_4 x$
e) $n(x) = \log_{0'5} x$
f) $p(x) = \log_{0'2} x$

Dada la función $f(x)\, log_2\, x$:

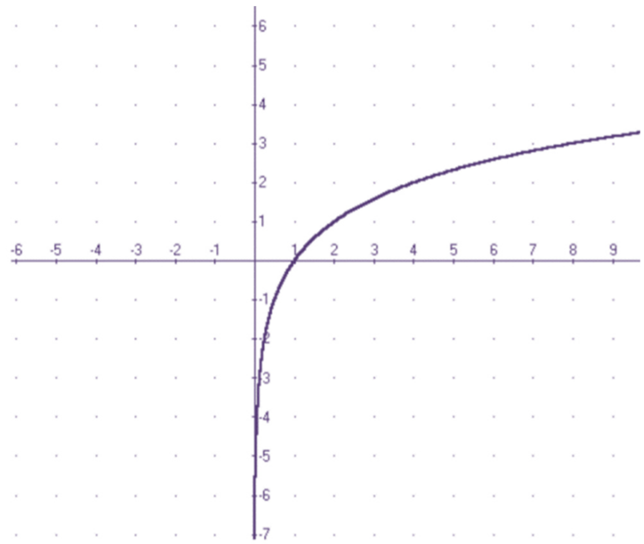
Sin utilizar tablas de valores dibuja las funciones:

$$g(x) = 3 + \ log_2 x$$

$$h(x)\ 1\ log_2 x = \ - +$$

$$m(x) = \ log_2(x+2)$$

$$f(x) = \ log_2(x-4)$$



FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS

Hemos estudiado funciones definidas por una sola expresión algebraica para todo su dominio, pero también podemos encontrar una función definida por intervalos, (también llamadas funciones definidas a trozos), por ejemplo:

EJERCICIO 8. Representa la función:

$$f(x) = \begin{cases} x+4 & \text{si } x \le -3 \\ 2 & \text{si } -3 < x \le 1 \\ -x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Esta función está definida en 3 tramos, para cada uno de estos tramos construiremos una tabla:

$f(x) = x+3$ cuando $x \le -3$.

x	f(x)
–5	–1
–4	0
–3	1

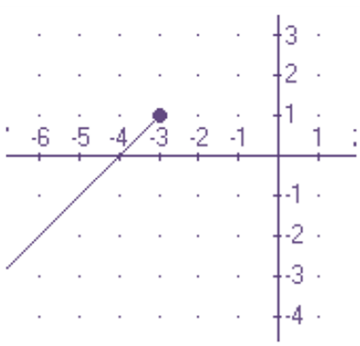
$f(x) = 2$ cuando $-3 < x \le 1$.

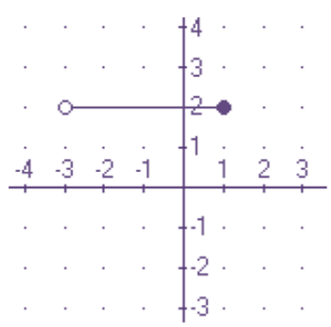
x	f(x)
–2'9	2
–1	2
1	2

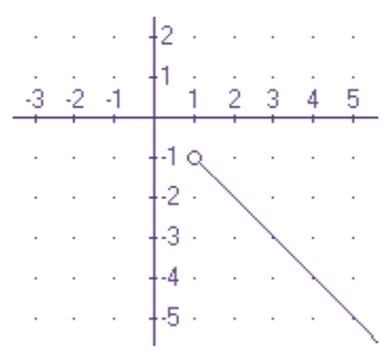
$f(x) = -x$ cuando $x > 1$

x	f(x)
1'1	–1'1
2	–2
4	–4

Para cada uno de los tramos representaremos un trozo de gráfica:



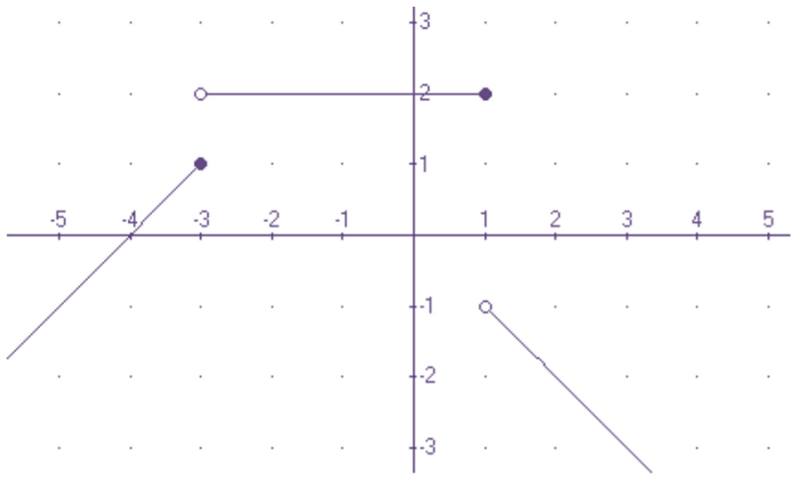




Nota: si el intervalo es abierto en un extremo es simboliza pintando un punto en blanco (o),

Si el intervalo es cerrado en un extremo se simboliza pintando un punto en negro (•)

La gráfica de la función es:



EJERCICIOS PROPUESTOS

Representa las siguientes funciones.

a) $f(x)=\begin{cases}-x+2 & \text{si } x\le 1\\ 2x & \text{si } x>1\end{cases}$

d) $k(x)=\begin{cases}-2x+6 & \text{si } x<2\\ x & \text{si } x\ge 2\end{cases}$

b) $g(x)=\begin{cases}-x+3 & \text{si } x\le -1\\ 2x+6 & \text{si } x>-1\end{cases}$

e) $m(x)=\begin{cases}3+2x & \text{si } x\le 0\\ x^2-1 & \text{si } x>0\end{cases}$

Representa las siguientes funciones:

a) $p(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{si } x\le -2\\ -x^2+1 & \text{si } -2<x<3\\ x+1 & \text{si } x\ge 3\end{cases}$

b) $q(x)=\begin{cases}x+1 & \text{si } x<-1\\ x^2-4 & \text{si } -1\le x\le 2\\ 4 & \text{si } x>2\end{cases}$

c) $r(x)=\begin{cases}-x+2 & \text{si } x\le -4\\ -3 & \text{si } -4<x\le -2\\ x^2-4 & \text{si } -2<x<1\\ -x+4 & \text{si } x\ge 1\end{cases}$

Estudia gráficamente las siguientes funciones:

Define las funciones siguientes a trozos.

a) $a(x)=|x|$

c) $c(x)=|x-3|$

e) $e(x)=|x^2-9|$

b) $b(x)=|x+2|$

d) $d(x)=|-2x+4|$

f) $f(x)=|x^2-4x|$

INFORMACIÓN (INCLUÍDA EN ESTE DOCUMENTO EDUCATIVO) TOMADA DE:

Sitios web:

1. http://www.mty.itesm.mx/dtie/deptos/m/ma00-841-1/FuncionesTrigonometricas.htm
2. http://dgenp.unam.mx/direccgral/secacad/cmatematicas/pdf/m5unidad02.pdf
3. https://www.uv.es/lonjedo/esoProblemas/unidad9funcionexponencialydefinidaatrozos.pdf