CBS
Colegio Bautista Shalom

Ciencias Naturales
Básicos PFS
Tercer Semestre

Contenidos

VECTORES

- ✓ MAGNITUDES ESCALARES Y VECTORIALES.
  - MAGNITUDES ESCALARES.
  - MAGNITUDES VECTORIALES.
- ✓ NOTACIÓN DE VECTORES.
- ✓ SISTEMA DE COORDENADAS.
- ✓ OPERACIONES CON VECTORES.
- ✓ SUMAR Y RESTAR VECTORES CON COMPONENTES CONOCIDAS.
- ✓ SUMA DE VECTORES GRÁFICAMENTE.
- ✓ SUMA DE VECTORES DE FORMA ANALÍTICA.
- ✓ RESTA GEOMÉTRICA DE VECTORES.
- ✓ MULTIPLICACIÓN DE UN ESCALAR POR UN VECTOR.
- ✓ SUMA Y RESTA DE MANERA ALGEBRAICA.
- ✓ PRODUCTO DE UN VECTOR POR UN ESCALAR.
- ✓ PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES.
- ✓ PRODUCTO VECTORIAL.
- ✓ VECTORES EN 3D.

MRUV

- ✓ SIGNO DE LA ACELERACIÓN.
- ✓ VALOR DE LA ACELERACIÓN.
- ✓ FÓRMULAS DEL MRUV.
- ✓ GRÁFICOS DE LA VELOCIDAD VS TIEMPO (ACELERACIÓN POSITIVA Y NEGATIVA).

INFORMACIÓN (INCLUÍDA EN ESTE DOCUMENTO EDUCATIVO) TOMADA DE:

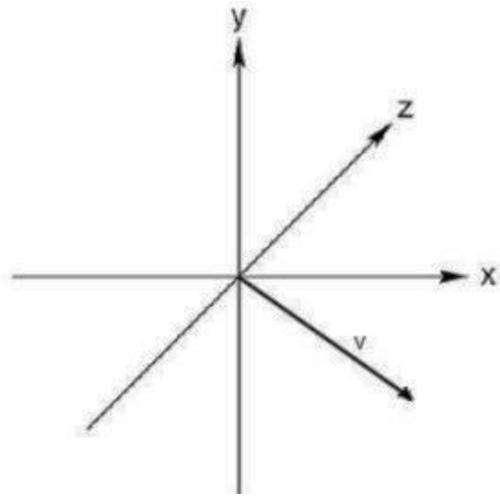
Sitios web:

1. *http://tochtli.fisica.uson.mx/electro/vectores/definici%C3%B3n_de_vectores.htm*
2. *http://smaris.edu.ec/wp-content/uploads/2017/07/Gu%C3%ADa-de-ejercicios-propuestos-sobre-magnitudes-vectoriales.pdf*
3. *http://www2.montes.upm.es/dptos/digfa/cfisica/magnitudes/magnitudes.htm*
4. *https://www.matesfacil.com/ESO/geometria_plana/vectores/ejercicios-resueltos-vectores-suma-producto-escalar-modulo.html*
5. *https://www.fisic.ch/contenidos/elementos-matem%C3%A1ticos-b%C3%A1sicos/vectores/*
1. *http://www.fisicapractica.com*
2. *http://matemovil.com*
3. *http://cpreuni.blogspot.com/2010_11_01_archive.html*
4. *http://www.fisimat.com.mx*
5. *https://rodolforobinson.files.wordpress.com*
6. *http://www.fisica.pe*
7. *http://www.ejemplode.com*

NOTA: conforme vayas avanzando en el aprendizaje de cada uno de los temas encontrarás ejercicios o laboratorios. Cópialos en hojas aparte y resuélvelos. Sigue las instrucciones de tu catedrático(a).

VECTORES

Antes de definir científicamente qué es un vector**,** intentemos conocer o identificar un vector.



La figura (derecha) nos muestra un sistema de coordenadas espaciales (y, x, z) y un vector V. Entonces, podemos decir que básicamente, un vector es una flecha, la cual nos indica una dirección. En este caso, la flecha expresa el sentido positivo del vector.

También se puede afirmar que un vector representa una dirección en el espacio. Con más detalle, un vector es un segmento de recta con origen en un punto del espacio y que sirve para representar magnitudes que tienen una dirección y un sentido (por lo mismo se llaman magnitudes vectoriales).

La *velocidad* y la *fuerza* son dos ejemplos de magnitudes vectoriales.

Como hablamos de magnitud, eso significa que tiene un tamaño, el cual llamaremos *módulo*. Entonces *un vector tiene módulo (digamos que es su tamaño), dirección y sentido.*

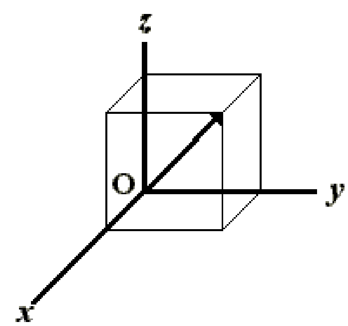
En la figura, de arriba, el punto O es el origen o punto de aplicación del vector y B su extremo. La longitud del segmento es la medida o módulo vectorial, y su dirección es la misma de la flecha. Aquí es importante destacar que con los vectores también se pueden realizar algunas operaciones como la suma y la resta de ellos o la multiplicación de un vector por un escalar.

Antes de continuar, aclaremos estos dos conceptos: *magnitud escalar* y *magnitud vectorial*.

Características de cada vector:

1. **Origen.** O también denominado *Punto de aplicación*. Es el punto exacto sobre el que actúa el vector.
2. **Módulo.** Es la longitud o tamaño del vector. Para hallarla es preciso conocer el origen y el extremo del vector, pues para saber cuál es el módulo del vector, debemos medir desde su origen hasta su extremo.
3. **Dirección.** Viene dada por la orientación en el espacio de la recta que lo contiene.

4. **Sentido** Se indica mediante una punta de flecha situada en el extremo del vector, indicando hacia qué lado de la línea de acción se dirige el vector.



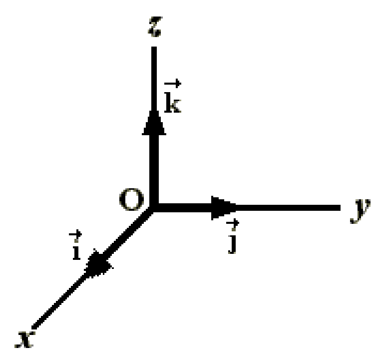
Hay que tener muy en cuenta el sistema de referencia de los vectores, que estará formado por un origen y tres ejes perpendiculares. Este sistema de referencia permite fijar la posición de un punto cualquiera con exactitud.

El sistema de referencia que usaremos, como norma general, es el *Sistema de Coordenadas Cartesianas.* Para poder representar cada vector en este sistema de coordenadas cartesianas, haremos uso de tres vectores *unitarios*. Estos vectores unitarios, son unidimensionales, esto es, tienen módulo 1, son perpendiculares entre sí y corresponderán a cada uno de los ejes del sistema de referencia.

Por ello, al eje de las X, le dejaremos corresponder el vector unitario $\vec{i}$ o también denominado $\hat{i}$.

Del mismo modo, al eje Y, le corresponderá el vector unitario $\vec{j}$ o también denominado $\hat{j}$.

Finalmente, al eje Z, le dejaremos corresponder el vector unitario $\vec{k}$ o también denominado $\hat{k}$.



Por tanto, obtendríamos un eje de coordenadas cartesianas de la siguiente forma (observa la ilustración a la derecha).

MAGNITUDES ESCALARES Y VECTORIALES

Las magnitudes son propiedades físicas que pueden ser medidas, como por ejemplo: temperatura, longitud, fuerza, corriente eléctrica, entre otras. Encontramos dos tipos de magnitudes: las escalares y las vectoriales.

MAGNITUDES ESCALARES

Las magnitudes escalares tienen únicamente como variable a un número que representa una determinada cantidad. La masa de un cuerpo, que en el Sistema Internacional de Unidades se mide en kilogramos, el volumen, que se mide en metros cúbicos, la temperatura o la longitud, son algunos ejemplos de magnitudes escalares.

MAGNITUDES VECTORIALES

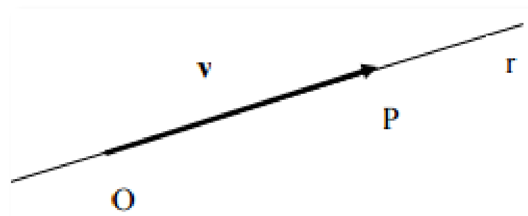
En muchos casos las magnitudes escalares no nos dan información completa sobre una propiedad física. Por ejemplo una fuerza de determinado valor puede estar aplicada sobre un cuerpo en diferentes sentidos y direcciones. Tenemos entonces las magnitudes vectoriales que, como su nombre lo indica, se representan mediante vectores, es decir que además de un módulo (o valor absoluto) tienen una dirección y un sentido.

"Las magnitudes vectoriales son aquellas que para quedar bien definidas, necesitan, además de un número y de una unidad de medida, dirección y sentido." Ejemplos de magnitudes vectoriales son la velocidad, la fuerza, la aceleración y el campo eléctrico.

Algunas definiciones importantes:

- ✓ Se llama **vector** a todo segmento orientado. El primero de los puntos que lo determinan se llama **origen** y el segundo **extremo del vector**. La recta que contiene al vector determina la dirección del mismo y la orientación sobre la recta, definida por el origen y el extremo del vector, determina su sentido.

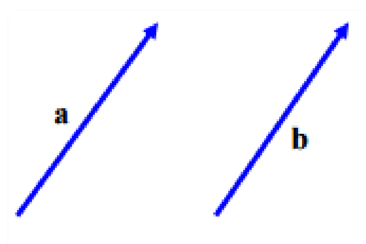
  En la figura se representa el vector a sobre la recta r, de origen O y extremo P. En adelante los vectores serán designados con letras mayúsculas o minúsculas en negrita.



- ✓ Se denomina **módulo** de un vector a la longitud del segmento orientado que lo define. El módulo de un vector es siempre un número positivo. Será representado mediante la letra sin negrita o como vector entre barras: mód v = v = |v|.

- ✓ Dos vectores son **iguales** (llamados **equipolentes** por algunos autores) cuando tienen el mismo módulo y la misma dirección y sentido.

  En figura es a = b. Esta definición corresponde a lo que se denominan vectores libres; o sea, vectores que pueden deslizar a lo largo de una recta y desplazarse paralelamente a sí mismos en el espacio. Son los que nos interesan y cumplen con las tres propiedades (reflexiva, simétrica y transitiva) que se exigen a toda definición de equivalencia entre elementos de un conjunto.



LABORATORIO 01.

a. A continuación encontrarás varias medidas. Indique cuales son vectores y cuales son escalares.

1) 40.5 cms ______________________________
2) 10 mts/seg hacia arriba ______________________________
3) 10 grados centígrados ______________________________
4) 300 segundos ______________________________
5) 18 mts/h norte y hacia arriba ______________________________
6) Q35.00 ______________________________
7) 45 Nt. 30° E ______________________________
8) 20 años ______________________________
9) 10 mts ______________________________
10) 40 millas/seg hacia el este ______________________________

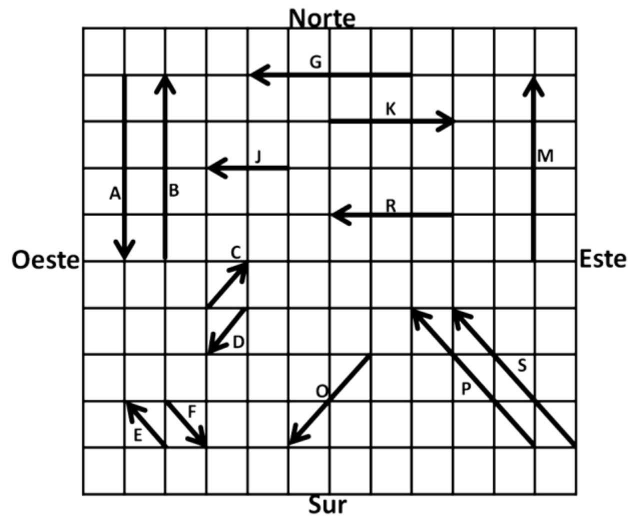
b. Define en tu cuaderno los siguientes términos.

1) Magnitud.
2) Magnitudes vectoriales.
3) Magnitudes escalares.
4) Fuerza.
5) Modulo.
6) Escala.
7) Vector.
8) Origen.

NOTACIÓN DE VECTORES

Para la escritura de vectores se utiliza la notación representando estas magnitudes vectoriales por letras negritas.

Por ejemplo; **V** (en negrita); y la representación de su módulo por la correspondiente letra cursiva *V* o bien la notación **|V|**. Cuando definamos el vector por su origen (**O**) y extremo (**O¨**) convendremos en representarlo así: **OO¨** o también mediante la diferencia simbólica **O´- O**. Sin embargo, en las figuras optamos por representarlos como normalmente se hace en un manuscrito o en la pizarra del aula, es decir, con la flecha indicativa de vector sobre la letra que representa a la magnitud vectorial correspondiente.



Dirección de un vector con puntos cardinales: Para dar la dirección de un vector mediante puntos cardinales se anota de primero el punto cardinal norte o sur de acuerdo a la ubicación del vector, luego el ángulo que forma con el norte o sur y finalmente el punto cardinal este u oeste según corresponda. Nota: Recuerde los cuadrantes del plano cartesiano y sus respectivos signos, serán de utilidad al realizar operaciones vectoriales.

EJERCICIO 01. Copia de nuevo el cuadro. En esta actividad podrás formarte una representación mental del concepto de vector. Analiza el cuadro de la derecha:

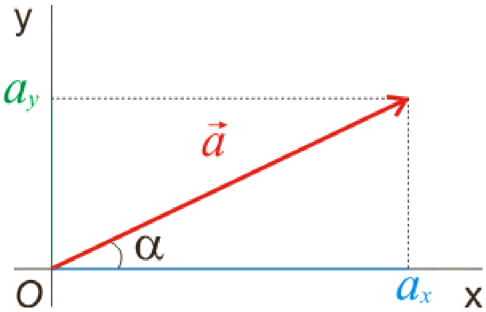
VECTORES	MAGNITUD	DIRECCIÓN	SENTIDO
A y B			
G y K			
C y D			
E y F			
P y S			
R y G			
B y M			
O y P			
C y J			
A y S			
F y J			

Luego con la información del cuadro llena la tabla de abajo. Compara el par de vectores que se te indican, colocando en cada columna la palabra: iguales o diferentes, según sea tu apreciación.

SISTEMA DE COORDENADAS

En general a lo largo de estas páginas emplearemos el sistema de coordenadas cartesianas para especificar las componentes de un vector.

El sistema de coordenadas cartesianas está constituido por tres ejes (dos si trabajamos en dos dimensiones) perpendiculares entre sí que se cortan en un punto llamado origen.



Componentes cartesianas:

$$\vec{a} = (a_x, a_y)$$

En tres dimensiones:

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

Las componentes cartesianas de un vector son las proyecciones de dicho vector sobre cada uno de los ejes. Como se observa en la figura anterior están relacionadas con el ángulo que forma el vector con el **eje x** y con su longitud (módulo):

$$a_x = a\cos\alpha$$
$$a_y = a\,sen\,\alpha$$

$$\alpha = arctg\frac{a_y}{a_x}$$
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

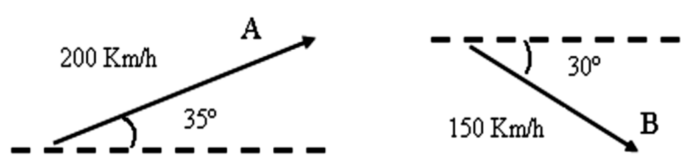
Por tanto, el **vector a** puede expresarse como: $\vec{a} = (a, \alpha)$

Y en ese caso está expresado en **coordenadas polares** (esféricas en tres dimensiones).

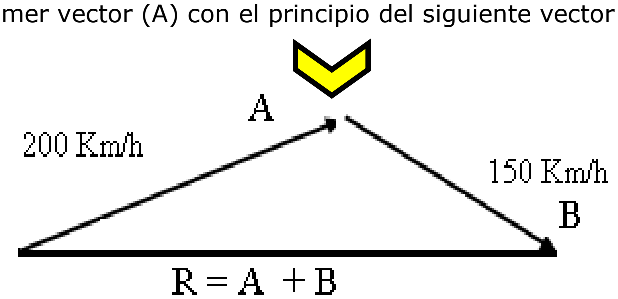
OPERACIONES CON VECTORES

Para sumar vectores por el método gráfico debe colocarse todos los vectores a sumar uniendo el fin del primer vector con el principio del siguiente y así sucesivamente. Cuando se haya terminado con el último, se unen el principio del primer vector con el fin del último vector; esta unión es otro vector llamado vector resultante. La suma gráfica de vectores con regla y transportador a veces no tiene la exactitud suficiente y no es útil cuando los vectores están en tres dimensiones.

Ejemplo 1. Sumar los vectores A y B:



Solución: Se coloca el fin del primer vector (A) con el principio del siguiente vector (B).

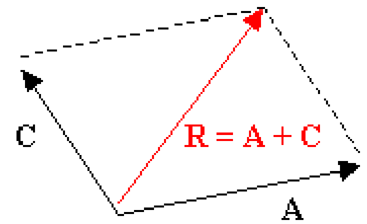


Sabemos, de la suma de vectores, que todo vector puede descomponerse como la suma de otros dos vectores, llamados los componentes vectoriales del vector original. Para sumarlos, lo usual es escoger las componentes sumando a lo largo de dos direcciones perpendiculares entre sí.

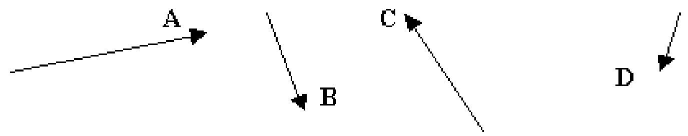
El Método del Paralelogramo. Permite sumar dos vectores de manera sencilla. Consiste en colocar los dos vectores, con su magnitud a escala, dirección y sentido originales, en el origen, de manera que los dos vectores inicien en el mismo punto. Los dos vectores forman dos lados adyacentes del paralelogramo. Los otros lados se construyen trazando líneas paralelas a los vectores opuestos de igual longitud. El vector suma resultante se representa a escala mediante un segmento de recta dado por la diagonal del paralelogramo, partiendo del origen en el que se unen los vectores hasta la intersección de las paralelas trazadas. Para sumar dos vectores, unimos sus colas y formamos un paralelogramo. La resultante será la diagonal que parte de la unión de las colas. Usaremos los siguientes vectores:

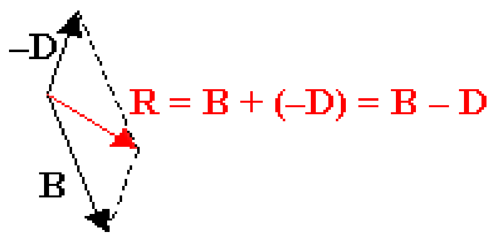
EJEMPLO A. Efectuar la suma A + C.

Al juntar las colas de los vectores y formar un paralelogramo tendríamos la siguiente resultante (en rojo):



EJEMPLO B. Efectuar la resta B – D. Esta resta equivale a B + (–D). Por lo tanto, juntaremos las colas de los vectores B y (–D), formando luego un paralelogramo. Posteriormente, obtenemos la resultante (en rojo).





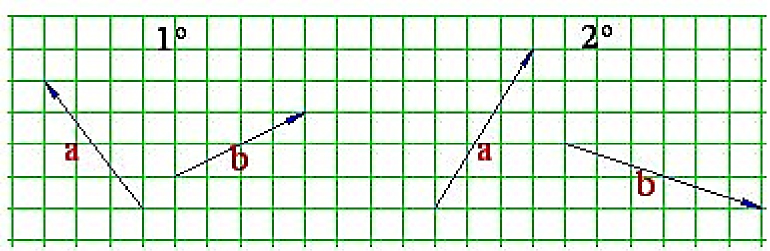
EJERCICIO 02: realiza las siguientes sumas con los vectores dados arriba, las respuestas deben ser gráficas.

1) C + B **2)** B + A **3)** B – A **4)** D – C

Propiedades de la suma de vectores

1. Asociativa: *u + (v + w) = (u + v) + w*
2. Conmutativa: *u + v = v + u*
3. Elemento neutro: *u + 0 = u*
4. Elemento opuesto: *u + (– u) = 0*

EJERCICIO 03. Realiza las siguientes restas con los vectores dados en el espacio cuadriculado, las respuestas deben ser gráficas.



SUMAR Y RESTAR VECTORES CON COMPONENTES CONOCIDAS

Dado que los vectores tienen una magnitud escalar y otra direccional, normalmente se pueden dividir dimensionalmente en distintas partes basándonos en sus coordenadas ***x***, y ***y***/o ***z***. Estas dimensiones suelen expresarse con una notación parecida a la que se utiliza para localizar puntos en un sistema de coordenadas (por ejemplo, *<x, y, z>*). Si conocemos estos componentes, sumar o restar vectores es tan sencillo como sumar o restar sus coordenadas *x,* y *y z*. Toma en cuenta que los vectores pueden tener 1, 2 o 3 dimensiones.

Por lo tanto, los vectores pueden tener solo una componente x, las componentes x e y, o las componentes x, y y z.

El ejemplo que puedes ver abajo muestra vectores tridimensionales, pero el proceso es el mismo para los vectores bidimensionales y unidimensionales.

Supongamos que tenemos dos vectores tridimensionales A y B. Podemos expresar estos vectores en notación vectorial como A = <a1, b1, c1> y B = <a2, b2, c2>, donde a1 y a2 son sus componentes x, b1 y b2 son sus componentes y, y c1 y c2 son sus componentes z.

$$A = \langle a_1, b_1, c_1 \rangle$$
$$B = \langle a_2, b_2, c_2 \rangle$$

Para sumar dos vectores: suma sus componentes.

Si conocemos las componentes de dos vectores, estos vectores se pueden sumar sumando sus correspondientes componentes dimensionales. En otras palabras, suma la componente x del primer vector con la componente x del segundo y haz lo mismo para las componentes y y z. Los resultados que obtengas después de sumar las componentes x, y y z de los vectores originales son las componentes x, y y z del nuevo vector.

En términos generales: A+B = a1+a2, b1+b2, c1+c2

$$A + B = a_1 + a_2 \quad b_1 + b_2 \quad c_1 + c_2$$

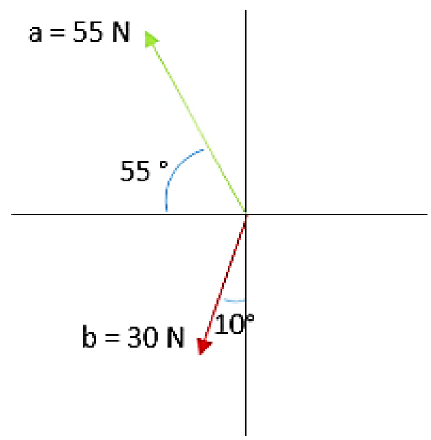
Sumemos dos vectores A y B.

- ✓ A = <5, 9, -10>
- ✓ B = <17, -3, -2>.
- ✓ A + B = <5+17, 9+-3, -10+-2>,
- ✓ Como veremos el Resultado es: <**22, 6, -12**>.

Para restar dos vectores, resta sus componentes. Debido a las reglas, restarle un vector a otro puede ser equivalente a sumarle su "opuesto". Si conocemos las componentes de dos vectores, se le puede restar un vector a otro restándole las componentes del primero al segundo simplemente (o sumando sus negativos). En términos generales, A-B = <a1-a2, b1-b2, c1-c2>
Restémosle al vector A el vector B.

- ✓ A = <18, 5, 3>
- ✓ B = <-10, 9, -10>.
- ✓ A - B = <18--10, 5-9, 3--10>
- ✓ Como veremos el Resultado es <**28, -4, 13**>.

Sin embargo, puede ocurrir que los vectores nos sean dados sin sus componentes, entonces es necesario extraerlos de la información que nos es dada. En el caso de la suma de vectores, se puede hacer como ya estudiamos de dos maneras, sumando por componentes o por un método gráfico. Para hacer una suma de vectores por componentes necesitamos saber las componentes en "x" y en "y" de cada vector, y ¿cómo obtener las componentes de un vector?



a = 55 N, b = 30 N

Primero sacamos los ángulos de cada vector al eje "x" positivo en sentido opuesto al de las manecillas.

- ✓ θ a =125°
- ✓ θ b = 180 + 90 – 10 = 260°

Ahora sacamos las componentes en "x" multiplicando la magnitud por el coseno del ángulo al eje "x" positivo.

- ✓ ax = 55N (*cos* 125°) = -31.55 N
- ✓ bx = 30N (*cos* 260°) = -5.2 N

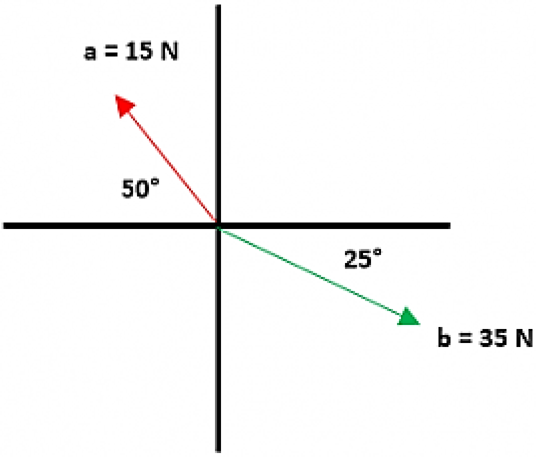
Ahora sacamos las componentes en "y" multiplicando la magnitud por el seno del ángulo al eje "x" positivo.

- ✓ ay = 55N (*sen* 125°) = 45.05 N
- ✓ by = 30N (*sen* 260°) = -29.54 N

**Este método tiene la ventaja de sumar o restar dos o más vectores a la vez.

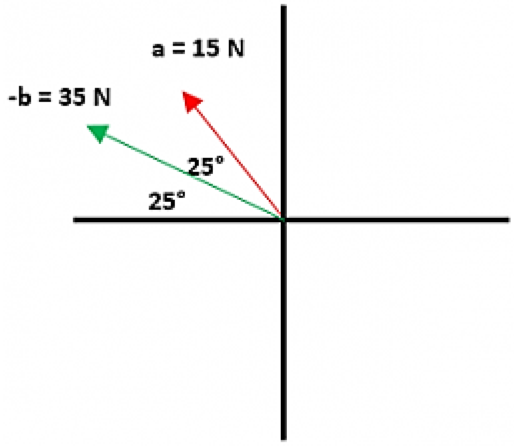
- ✓ Ahora sumamos las componentes en "x" y en "y": a+b = <-36.75, 15.51>
- ✓ El vector resultante tiene una magnitud de **39.89 N**.

En el caso de la resta de vectores de componentes desconocidos este sería el procedimiento, Tenemos los siguientes vectores:



a = 15 N

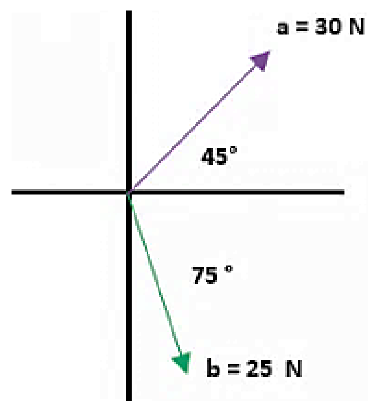
Obtenemos el vector opuesto de *b:*



-b = 35 N

- ✓ Medimos el ángulo al eje "x" positivo: θa = 180-50 = 130°, θb = 180-25 = 155°
- ✓ Sacamos la componente en "x": ax = 15 cos 130° = -9.64, bx = 35 cos 155° = -31.72
- ✓ Sacamos la componente en "y": ay = 15 sen 130° = 11.49, by = 35 sen 155° = 14.79
- ✓ Sumamos las componentes en x y las componentes en y: a + (-b) = (-41.36, 26.28)

EJERCICIO 04: con el siguiendo el procedimiento que fue explicado anteriormente, resuelve en tu cuaderno la siguiente resta de vectores, este ejemplo se resolverá por el método de las componentes, tenemos los siguientes vectores (imagen derecha).

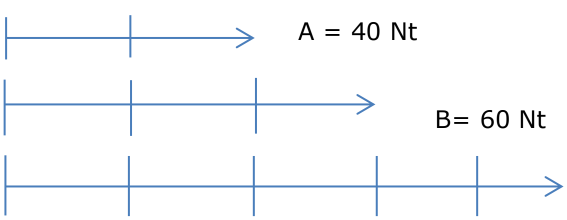


SUMA DE VECTORES GRÁFICAMENTE

Al sumar dos vectores v_1 y v_2, su resultante es un vector R, cuya magnitud es igual a la suma de las magnitudes de los dos vectores y cuya dirección y sentido es la misma que la de los vectores.

Ejemplo 1. Encontrar la resultante y su dirección de los vectores A = 40 NT horizontal y hacia la derecha y B= 60 Nt horizontal y hacia la derecha.

Solución. Con la escala 1 cm para 20 Nt, se dibuja el primer vector (2 cm). A continuación se dibuja el siguiente (3cm). Se mide este vector con una regla y resulta de 5 cm. (5 x 20 = 100), por lo tanto la resultante es igual a 100 Nt dirección horizontal y sentido hacia la derecha.



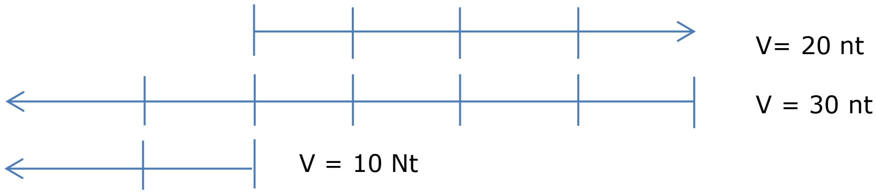
A = 40 Nt

B= 60 Nt

A + B = 100 Nt

Ejemplo 2. Encontrar el resultante de dos vectores horizontales. Uno hacia la derecha 20 Nt y el otro hacia la izquierda de 30 Nt.

Solución. Escala 1 cm = 5 Nt. Se dibujan los vectores de la forma ya explicada. La resultante es de 10 Nt horizontal y hacia la izquierda.



LABORATORIO 02. Encuentra la forma gráfica la resultante y su dirección de:

1) Dos vectores de 30 mi/h y 50 mi/h ambos verticales y con sentido hacia arriba.
2) Tres vectores horizontales con sentidos hacia la derecha miden respectivamente 4, 6 y 8 unidades.
3) Dos vectores verticales, uno con sentido hacia arriba y de 90 unidades y otro con sentido hacia debajo de 30 unidades.
4) Un automóvil se desplaza hacia el sur 100 km y en seguida 50 km hacia el norte.
5) Dos vectores de 90 unidades y 190 unidades ambos horizontales con sentido hacia la derecha.

SUMA DE VECTORES DE FORMA ANALÍTICA

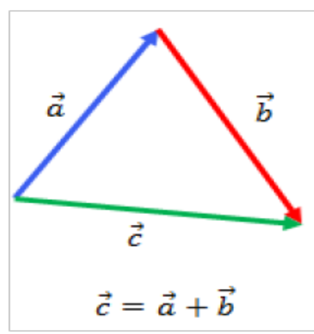
Existen dos formas de obtener la resultante por método analítico, el del triángulo y el de las componentes. Se presenta la descripción del método más utilizado que es el de las componentes.

Se descomponen los vectores en sus componentes rectangulares.

Las coordenadas del vector suma (resta) se calculan sumando las respectivas componentes de los vectores que se adicionan.

El módulo del vector resultante se calcula con la ecuación: $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$

La dirección y sentido se calcula por la fórmula trigonométrica: $\alpha = \tan^{-1} \frac{R_y}{R_x}$



Para aplicar el método del triángulo en la suma o resta de dos vectores, se analiza los elementos del triángulo formado por estos vectores y la resultante.

Conociendo la longitud de dos lados (en este caso la longitud de los vectores y el ángulo entre ellos es posible calcular la longitud de la resultante por la ley de los cosenos:

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}$$

El ángulo α entre la resultante y el eje x (este ángulo determina la dirección y sentido de la resultante) se calcula por la ley de los senos:

$$\frac{R}{\sin\theta} = \frac{a}{sen\alpha}$$

LABORATORIO 03. Realiza en tu cuaderno lo siguiente.

Encuentra utilizando el método analítico del triángulo la suma de dos vectores si $\overleftarrow{a}$ y $\overleftarrow{b}$:

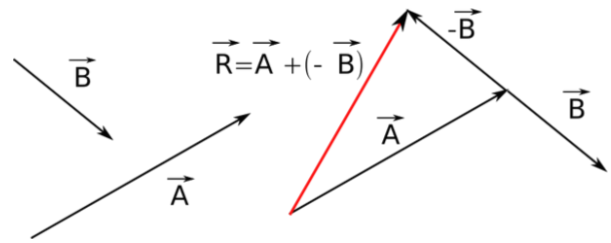
1. a = 10u y b = 10u y están desfasado 90°
2. a = 10u y b = 10u, $\overleftarrow{a}$ está dirigido horizontalmente y el vector $\overleftarrow{b}$ está desfasado en 60°
3. a = 20 u y b = 10u, $\overleftarrow{a}$ está dirigido verticalmente y el vector $\overleftarrow{b}$ está desfasado en 120°

La suma de vectores goza de las siguientes propiedades:

Conmutativa:	**a + b = b + a**
Asociativa:	**(a + b) + c = a + (b + c)**
Elemento neutro o vector 0:	**a + 0 = 0 + a = a**
Elemento simétrico u opuesto a':	**a + a' = a' + a = 0**
	a' = -a

RESTA GEOMÉTRICA DE VECTORES

Para la resta se procede de la misma forma que la suma, pero el vector que resta se debe dibujar con sentido contrario, o sea el signo negativo cambia el sentido del vector. Luego el vector resultante es el que va desde el punto inicial del primer vector, hasta el final del vector que se le cambio el sentido.



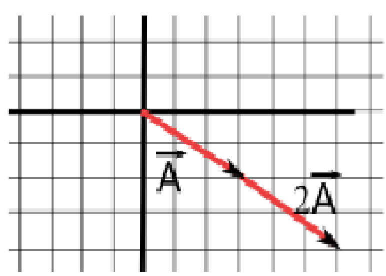
Cabe mencionar que la resta no es conmutativa = **A - B** es distinto a **B – A**

A - B = - (B - A)

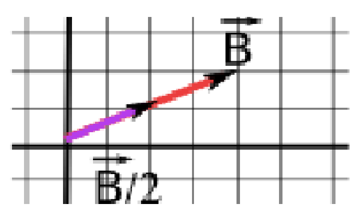
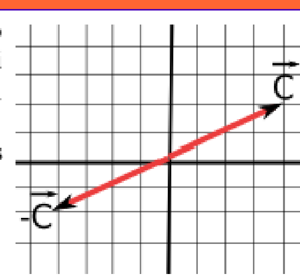
MULTIPLICACIÓN DE UN ESCALAR POR UN VECTOR

<table>
<tr><th>Multiplicación por un número positivo mayor que 1</th><th>Multiplicación por un número positivo menor que 1 y mayor que cero</th></tr>
<tr><td>En este caso el vector que se multiplica aumenta de módulo según el valor del escalar que multiplica y su dirección y sentido nunca cambian.
Ejemplo: sea el vector A= (3,-2) el cual se multiplica por 2, entonces tenemos:

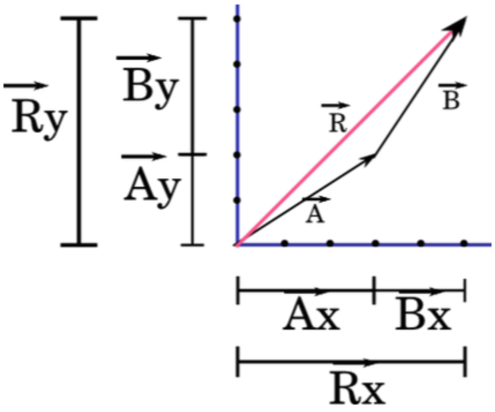
Forma algebraica
2 · (3,-2) = (6,-4)

Forma geométrica

</td><td>En este caso el escalar que multiplica al vector, hace que el módulo disminuya en cierto valor manteniendo su dirección y sentido.
Ejemplo: Sea el vector B = (4,2) si lo multiplicamos por 0,5, entonces tenemos:

Forma algebraica
0,5 · (4,2) = (2,1)

Forma geométrica

</td></tr>
<tr><th colspan="2">Multiplicación por un -1</th></tr>
<tr><td colspan="2">En este caso, al multiplicar un vector por el escalar -1, o cualquier número negativo cambia el sentido del vector y si es un numero mayor o menor que 1 cambia el tamaño del módulo también.
Ejemplo: Sea C= (4,2) y se multiplica por -1, entonces tenemos que:
-1 · (4,2) = (-4,-2)

</td></tr>
</table>

SUMA Y RESTA DE MANERA ALGEBRAICA



Suma algebraica de vectores.

Sean dos vectores **A** y **B** que se quieren sumar, entonces procedemos de la manera gráfica que sabemos, lo que nos da como resultado el vector **R.**

Ahora lo que haremos es escribir tanto el vector **A** como el **B** según sus componentes, entonces nos damos cuenta que la suma de la componentes "**X"** del vector **A** y **B**, es la componente **"X"** del vector **R** y así también con el eje **"Y"**.

Por lo tanto para sumar vectores de manera algebraica se debe escribir cada vector según sus componentes y luego sumar las componentes **"X"** e **"Y"** de los vectores, el resultado será el vector resultante según sus componentes, con las cuales se puede sacar el módulo del vector **R.**

Sea los vectores:

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$$

$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j}$$

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j}$$

$$\vec{R}_x = (A_x + B_x)\hat{i}$$

$$\vec{R}_y = (A_y + B_y)\hat{j} \qquad \textit{así}$$

$$\vec{R} = R_x\hat{i} + R_y\hat{j} \quad \textit{y el módulo es: } |\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

Ejemplo 1:Dados los vectores **A=(3,4)** *y* **B=(1,−2)** *¿Cuál es el vector resultante?*

$$\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$$

$$\vec{B} = 1\hat{i} - 2\hat{j}$$

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = (3+1)\hat{i} + (4-2)\hat{j}$$

$$\vec{R} = 4\hat{i} + 2\hat{j} \quad \textit{y el módulo es: } |\vec{R}| = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

LABORATORIO 04. Resolver lo siguiente:

1. Representa de manera gráfica los siguientes vectores en un plano cartesiano:

   a. A=(3,2) c. C= (3, 30º) e. E=3i-2j
   b. B=(-2,-5) d. D=(6,135º) f. F=-5i-2j

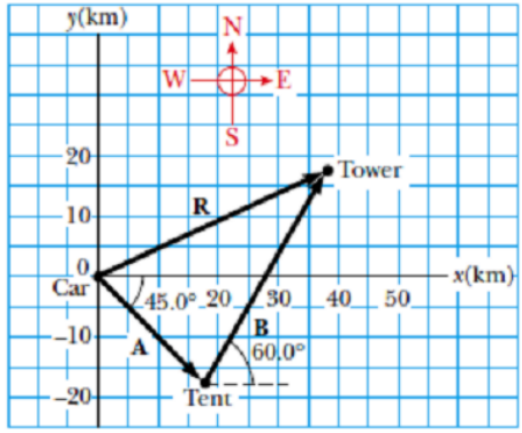
2. Calcula el módulo y la dirección de los siguientes vectores en notación rectangular. Luego dibuja un pequeño plano cartesiano y dibuje el vector según corresponde.

a. 3i + 2j b. -5i-6j c. 3i+4j d. -2i-5j e. 3i-3j

3. Sean los vectores $\vec{A} = 3i + 2j$, $\vec{B} = 2j$, $\vec{C} = 3i$. Entonces el valor de $\vec{A} + 2\,\vec{B} - \vec{C}$ es

4. Una persona inicia una excursión caminando 25 km hacia el sureste desde su campamento base. En el segundo día camina 40 km en una dirección de 60º al norte del este, punto en el cual descubre la torre de un guardabosque, Según esta información:

    a. Determina la(s) componente(s) del desplazamiento diario del excursionista.
    b. Determina las componentes del desplazamiento total R de la excursión en el viaje.
    c. Encuentra una expresión para R en término de los vectores unitarios (notación rectangular).

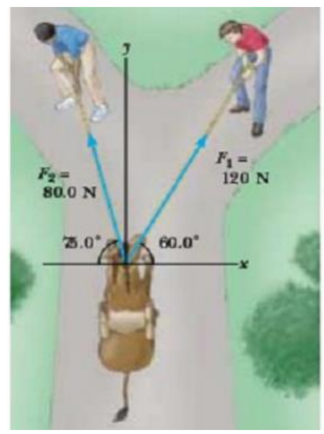


5. Una topógrafa calcula el ancho de un río mediante el siguiente método: se para directamente frente a un árbol en el lado opuesto y camina 100 [m] a lo largo de la ribera del río, después mira el árbol. El ángulo que forma la línea que parte de ella y termina en el árbol es de 35º. **¿Cuál es el ancho del río?**

6. Un peatón camina 6 [Km] al oeste y después 13 [Km] al norte. Mediante gráficos determine la magnitud y la dirección del vector desplazamiento resultante.

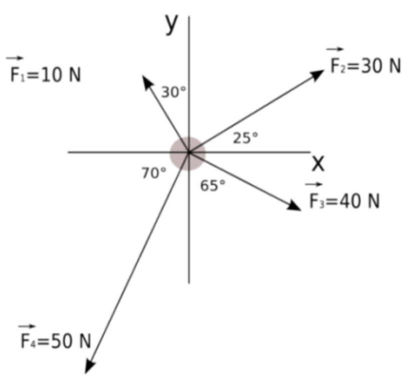
7. La pista del helicópetero muestra a dos personas que jalan a una obstinada mula. Determina:

    a. La única fuerza que es equivalente a las dos fuerzas indicadas.
    b. La fuerza que una tercera persona tendría que ejercer sobre la mula para hacer la fuerza resultante cero.



8. Un perro que busca un hueso camina 3,5 [m] hacia el sur, después 8,2 [m] en un ángulo de 30º al noreste y finalmente 15 [m] al oeste. Encuentra el vector desplazamiento resultante del perro utilizando técnicas de gráfica.

9. A partir del siguiente esquema encuentre el vector resultante de la suma de todas las fuerzas aplicadas sobre la pelota. No olvide ser secuencial y ordenado. Exprese cada vector en sus componentes rectangulares para proceder, y entregue la magnitud y dirección.



10. Dibuja los siguientes vectores en 3D A = (2,-2,2), B=(-3,-1,2), C=(0,3,2) No olvide hacer cada uno de los ejes, ser ordena y si es necesario rotar los ejes para visualizar y dibujar el vector.

PRODUCTO DE UN VECTOR POR UN ESCALAR

El resultado de multiplicar un escalar **k** por un vector **v**, expresado analíticamente por **kv**, es otro vector con las siguientes características:

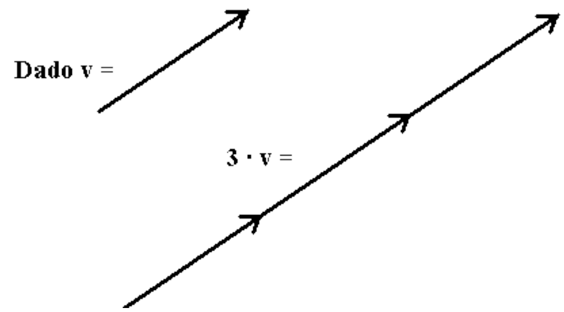
1. Tiene la misma dirección que **v**.
2. Su sentido coincide con el de **v**, si **k** es un número positivo, y es el opuesto, si **k** es un número negativo.
3. El módulo es **k** veces la longitud que representa el módulo de **v**. (Si **k** es 0 el resultado es el vector nulo).

Analíticamente, tenemos que multiplicar el escalar por cada una de las coordenadas del vector.

Ejemplo:

Dado el vector **v** de componentes: $\mathbf{v_x i + v_y j + v_z k}$, el producto $3 \cdot \mathbf{v} = 3 \cdot \mathbf{v_x i} + 3 \cdot \mathbf{v_y j} + 3 \cdot \mathbf{v_z k}$.

La representación gráfica del producto es igual a sumar el vector tantas veces como indica el escalar.



Ejemplo:

El producto de un vector por un escalar cumple las siguientes propiedades:

1. Conmutativa: $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}$.
2. Distributiva: $\mathbf{k}(\mathbf{v} + \mathbf{u}) = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u})$.
3. Elemento Neutro: $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$.
4. Elemento Simétrico: $-1 \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{v}$.

PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES

El producto escalar de dos vectores, expresado analíticamente como $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}$, se obtiene de la suma de los productos formados por las componentes de uno y otro vector. Es decir, dados dos vectores **r** y **v**, expresados en un mismo sistema de coordenadas:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r_x i + r_y j + r_z k}$$
$$\mathbf{v} = \mathbf{v_x i + v_y j + v_z k}$$

teniendo en cuenta que el producto escalar de los vectores :

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$$
$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0$$

el resultado de multiplicar escalarmente **r** por **v** es:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{r_x} \cdot \mathbf{v_x} + \mathbf{r_y} \cdot \mathbf{v_y} + \mathbf{r_z} \cdot \mathbf{v_z}$$

Esta operación no solo nos permite el cálculo de la longitud de los segmentos orientados que representan (sus módulos), sino también calcular el ángulo que hay entre ellos. Esto es posible, ya que el producto escalar también se puede hallar en función de sus módulos y del coseno del ángulo que forman mediante la fórmula:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{r}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos(\mathbf{r}, \mathbf{v})$$

Propiedades:

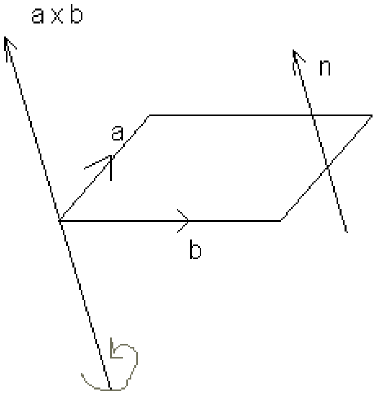
1. Conmutativa: $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}$
2. Distributiva: $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{u}) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{u}$
3. Asociativa: $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})$ siendo **k** escalar.

Además:

1. $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = 0$ si, y sólo sí $\mathbf{r} = 0$.
2. Si **r** y **v** <> 0 y $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = 0$, esto implica que los vectores son perpendiculares, (cos 90º = 0).

3. El producto escalar de dos vectores es equivalente a multiplicar escalarmente uno de ellos por el vector proyección del otro sobre él.

PRODUCTO VECTORIAL



El producto vectorial de los vectores **a** y **b**, se define como un vector, donde su dirección es perpendicular al plano de **a** y **b**, en el sentido del movimiento de un tornillo que gira hacia la derecha por el camino más corto de **a** a **b,**

Se escribe $a \times b$.

Por tanto: $a \times b = a \cdot b \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot n$

donde **n** es un vector unitario perpendicular al plano de **a** y **b** en el sentido del movimiento de un tornillo que gira hacia la derecha de **a** a **b**.

Propiedades:

$$a \times b = -b \times a$$
$$a \times b \neq b \times a$$
$$a \times (b + r) = a \times b + a \times r$$
$$a \times b = \vec{i} \cdot (a_y b_z - a_z b_y) + \vec{j} \cdot (a_z b_x - a_x b_z) + \vec{k} \cdot (a_x b_y - a_y b_x)$$

LABORATORIO 05. Producto Escalar de Vectores y Ángulo entre Vectores.

1. Sean los vectores:

$$\vec{a} = (2, -5)$$
$$\vec{b} = (-1, -3)$$
$$\vec{v} = (0, -1)$$
$$\vec{w} = (-1, 0)$$

Calcular los siguientes productos escalares:

$$\vec{a} \cdot \vec{b}, \quad \vec{a} \cdot \vec{v}, \quad \vec{a} \cdot \vec{w}$$
$$\vec{b} \cdot \vec{b}, \quad \vec{v} \cdot \vec{w}, \quad \vec{w} \cdot \vec{v}$$

2. Calcular el ángulo que forman los vectores:

$$\vec{e_1} = (1, 0)$$
$$\vec{e_2} = (0, 1)$$

Los llamamos así porque son los vectores de la base canónica del plano.

3. Calcular el ángulo que forman los vectores:

$$\vec{v} = (-2, 1)$$
$$\vec{w} = (-2, 6)$$

4. Demostrar que los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares a $\vec{v}$:

$$\vec{a} = (-y, x)$$
$$\vec{b} = (y. -x)$$
$$\vec{v} = (x, y)$$

Además, demostrar que los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos entre sí.

Se supone que: x, y ≠ 0

5. Demostrar que los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos a $\vec{v}$:

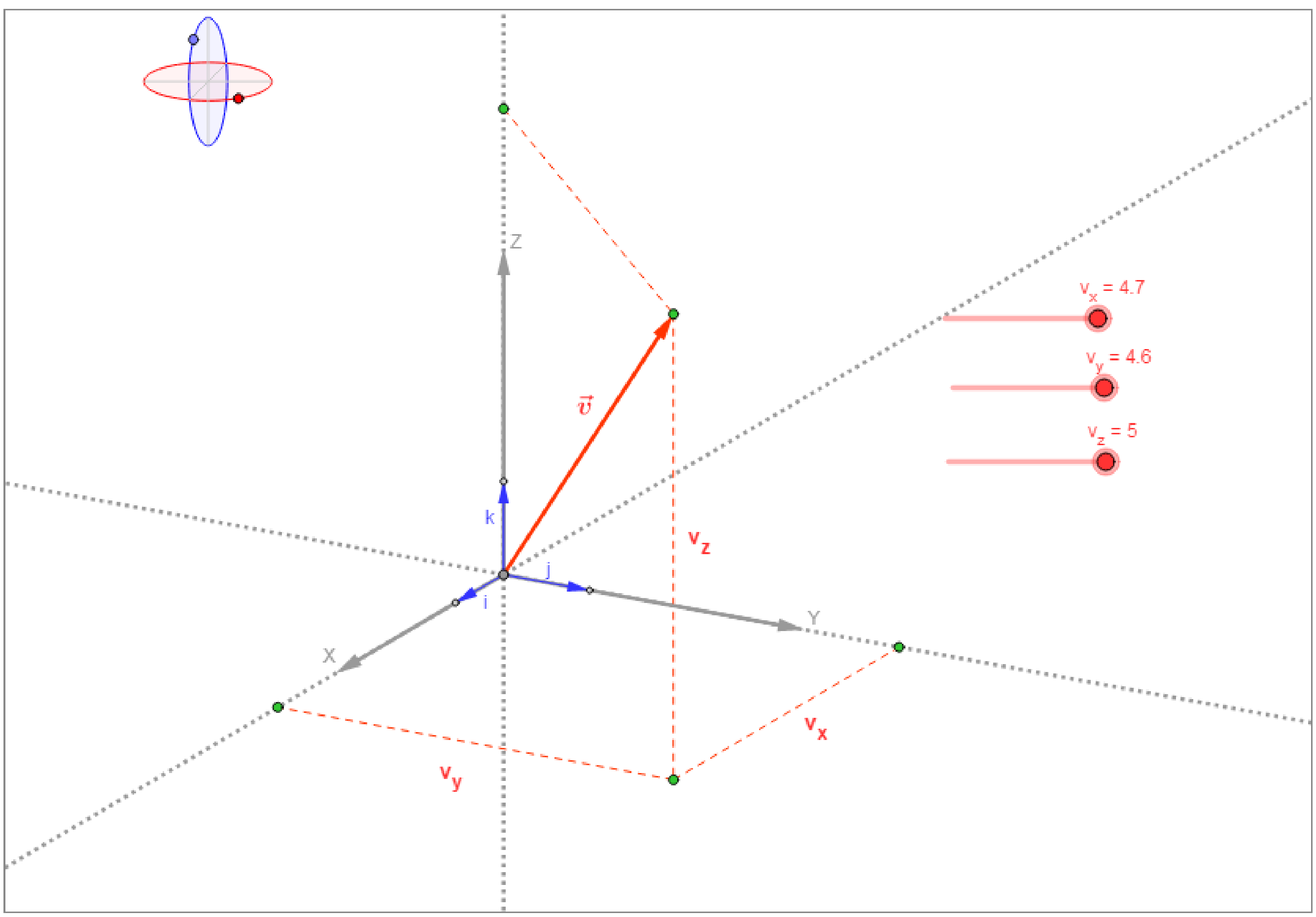
$$\vec{a} = (4, -6)$$
$$\vec{b} = (-4, 6)$$
$$\vec{v} = (2, -3)$$

Si ambos son paralelos, ¿por qué el ángulo que forman con $\vec{v}$ es distinto?

6. Encontrar el vector unitario que forma un ángulo de 60 grados con el vector:

$$\vec{v} = (0,2)$$

VECTORES EN 3D



CINEMÁTICA

La cinemática es la rama de la mecánica clásica que se ocupa del estudio de las leyes del movimiento de los cuerpos, independientemente y sin tener en cuenta aquellas causas que lo producen, es decir, la cinemática, se centra y limita a estudiar la trayectoria de un cuerpo en función del tiempo. La palabra cinemática proviene del griego "kineema", que significa movimiento.

La cinemática comprende una rama de la física que estudia el movimiento de los cuerpos en el espacio, independientemente de las causas que lo producen. Por lo tanto se encarga del estudio de la trayectoria en función del tiempo.

Elementos de la cinemática: La Cinemática se relaciona con las siguientes magnitudes:

- ✓ **El móvil:** es el cuerpo en movimiento que se va observar. Un cuerpo se mueve al compararlo con otro que este en reposo.
- ✓ **Espacio:** lugar en donde los objetos existen y en donde los fenómenos físicos que les afectan tienen lugar.
- ✓ **Tiempo:** Es el que indica la duración del movimiento de un cuerpo. Es la magnitud con la que calculamos el intervalo que transcurre desde el comienzo hasta el final del proceso o cambio que queremos medir, es decir, la duración del fenómeno que produce el cambio.
- ✓ **Movimiento:** es el cambio continuo de posición que podemos observar en un cuerpo o móvil.
- ✓ **Observador:** Es también llamado marco de referencia y tiene como objetivo medir el movimiento que traza una partícula.
- ✓ **Posición:** Corresponde al espacio geométrico que ocupa un cuerpo u objeto en el espacio.
- ✓ **Trayectoria:** Es una representación de la línea que une todas las posiciones tomadas por el cuerpo. Se puede clasificar en curvilíneas y rectilíneas. Es una línea imaginaria que va trazando el cuerpo mientras está en movimiento.
- ✓ **Desplazamiento:** es la distancia recorrida independientemente de la trayectoria trazada durante el movimiento.
- ✓ **Velocidad:** es la rapidez en la que cambia de posición un móvil. Es el resultado de dividir el espacio recorrido por el tiempo que ha sido necesario para recorrerlo. Cuanto más tarda un objeto en recorrer una distancia menor es su velocidad.
- ✓ **Aceleración:** es la relación entre los cambios en la velocidad y el tiempo en el que tienen lugar, es decir, nos habla de cuánto tarda la velocidad en aumentar o disminuir durante el desplazamiento, si ha sido más rápido o más lento.

Tipos de movimientos en la cinemática:

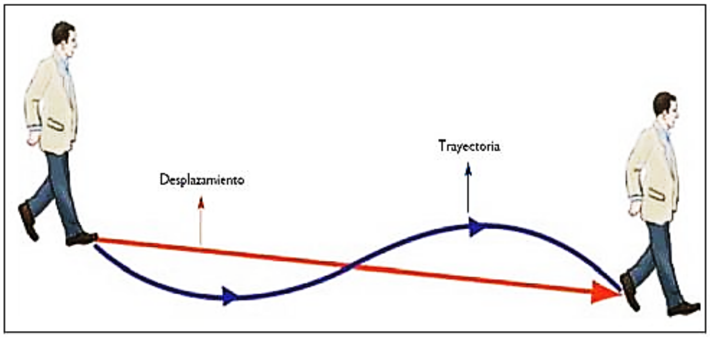
- ✓ **Movimiento rectilíneo uniforme:** son aquellos donde la trayectoria se hace en línea recta y la posición del punto móvil queda determinada por una sola coordenada. La velocidad permanece constante y no hay una alteración de la aceleración (a) en el transcurso del tiempo.
- ✓ **Movimiento rectilíneo uniforme acelerado:** Este movimiento es de aceleración constante y la velocidad varía linealmente y la posición cuadráticamente con tiempo.
- ✓ **Movimiento armónico simple:** El cuerpo u objeto oscila de un lado a otro, esto se debe a una posición de equilibrio en una dirección determinada, es importante saber que los movimientos se realizan en intervalos de tiempo iguales.
- ✓ **Movimiento circular:** El sistema de referencia se encuentra en el centro de la trayectoria circular.
- ✓ **Movimiento parabólico:** Son dos movimientos rectilíneos distintos uno horizontal y otro vertical.

En su casa y con la ayuda de bibliografía o de la información digital del buscador Google u otros, en su cuaderno, copie las preguntas numeradas abajo y a mano responda los siguientes enunciados y compara su respuesta con la dada por otros dos compañeros y entregarlo al profesor al finalizar la clase:

1. ¿Cuál es la velocidad de la luz?
2. ¿Cuál es la velocidad del sonido?

La velocidad de un barco es 40 nudos ¿A cuánto equivale un nudo en Km/h? y ¿Cuánto es 40 segundos?

TRAYECTORIA O DESPLAZAMIENTO



Concepto de movimiento y reposo: Se dice que un cuerpo se mueve con movimiento relativo a otro, cuando su posición respecto a éste, cambia con el transcurso del tiempo. Si la posición permanece constante al cabo de un tiempo, se dice que se encuentra en reposo relativo. Tanto el movimiento como el reposo son relativos y no absolutos, porque no hay en el universo un punto totalmente quieto que se pueda tomar como punto de referencia.

Posición de una partícula. La posición de una partícula sobre una recta, a partir de un origen la da la abscisa X. El vector que une el origen a la partícula es el vector posición X. La partícula se mueve de la posición inicial 0 x hasta la posición final x, el vector desplazamiento es:

$$\boxed{\Delta\vec{x} = \vec{x}_{final} - \vec{x}_{inicial}}$$

El símbolo "**Δ**" significa incremento, es decir el intervalo de la cantidad puesta a su derecha y siempre es la cantidad menos la inicial".

La abscisa (coordenada) depende del tiempo; se puede atribuir para cada posición de la partícula un tiempo (**t**).

Entonces el valor posición en función del tiempo **x = v (t)** El desplazamiento se efectúa en el intervalo de tiempo **$\Delta t = t - t_0$**

Ejemplo 1. Sobre una recta, un cuerpo tiene una posición dada por la ecuación x 50t, x en Km y t en horas.

- ✓ Para t0 la posición será x= 50(0), x = 0 Km
- ✓ Para t1 la posición será x= 50(1), x = 50 Km
- ✓ Para t2 la posición será x= 50(2), x = 100 Km
- ✓ Para t3 la posición será x= 50(3), x=50(3), x= 150 km.

Velocidad de una partícula: es la rapidez en la que cambia de posición un móvil. Es el resultado de dividir el espacio recorrido por el tiempo que ha sido necesario para recorrerlo. Cuanto más tarda un objeto en recorrer una distancia menor es su velocidad.

Se representa con la fórmula:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_0}{t - t_0}$$

$$V = \frac{\text{distancia total recorrida}}{\text{tiempo empleado en recorrerla}}$$

Ejemplo 2: Un auto recorre 120 Km en 3 horas. ¿Cuál es su velocidad media?

Aceleración de una partícula: Es la relación entre los cambios en la velocidad y el tiempo en el que tienen lugar, es decir, nos habla de cuánto tarda la velocidad en aumentar o disminuir durante el desplazamiento, si ha sido más rápido o más lento. Es la razón del incremento de la velocidad al intervalo de tiempo correspondiente.

$$a = \frac{\text{velocidad final - velocidad inicial}}{\text{tiempo}}$$

esto es, $a = \dfrac{v_f - v_i}{t}$

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V(t) - V_{inicial}}{t - t_{inicial}} = \frac{V(t) - V_0}{t - t_0}$$

$$\bar{v} = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{120\,Km - 0\,Km}{3\,h - 0\,h} = \frac{120\,Km}{3\,h} = 40\,km/h. \qquad v = 40\,km/h.$$

Cuando un vector aceleración se dirige en la dirección positiva del eje, la aceleración positiva indica que la velocidad está creciendo, es decir el movimiento se acelera. Si la aceleración es negativa, la velocidad está disminuyendo y el movimiento se desacelera.

Ejemplo 4. Sobre una recta un auto acelera de una velocidad de 50 Km/h a 110 Km/h en 3 horas. ¿Cuál es la aceleración?

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t - t_0} = \frac{110\,km/h - 50\,km/h}{3\,h} = \frac{60\,km/h}{3\,h} = 20\,km/h^2$$

MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME (MRU O MU)

El movimiento rectilíneo Uniforme se caracteriza por que la trayectoria de un móvil, es una línea recta, recorriendo distancias iguales en tiempos iguales; su velocidad es CONSTANTE lo que implica que la aceleración es nula.

Un movimiento es uniforme cuando su velocidad ***v*** es constante. Definamos las magnitudes del MRU.

- ✓ Desplazamiento (x): Es el cambio de posición que realiza un móvil. ***X***: Distancia o espacio recorrido (Km, mts. o pies).
- ✓ Tiempo (ƫ): Es la duración de un evento físico. ƫ: Tiempo (h, min. o s).
- ✓ Velocidad (***v***): Es el cambio de desplazamiento sobre unidad de tiempo. La velocidad de un cuerpo se da en unidad de desplazamiento sobre unidad de tiempo (L/T). V: Velocidad (Km/h, m/s, cm/s o pies/s).

Ejemplo. Un automóvil se mueve con velocidad constante a razón de 100 Km/h, durante 5 horas. Calcular la distancia recorrida. Solución:

La velocidad es constante entonces utilizaremos la ecuación: $x = v \cdot t$
Reemplazando en esta ecuación los valores: $x = 100\,Km/h \times 5\,h$
El desplazamiento es: $x = 500\,km$

Ejemplo. Juan fue en su automóvil a la tienda a comprar la cena; Juana llama a Juan a su teléfono para preguntarle si tardará mucho en llegar porque ella tiene mucha hambre. 12 minutos después llega Juan a su casa con la cena. ¿A qué distancia de la casa se encontraba Juan cuando recibió la llamada? Ten en cuenta que el auto de Juan llevaba una velocidad de 120 km / h.

Datos:
v = 120 km / h = 2 km / minutos
t = 12 minutos
d = x
Fórmula:
d = v * t
Sustitución y resultado
d = 2 km / minuto * 12 minutos
d = 24 km

Ejemplo. El auto nuevo de Juan se desplaza con movimiento rectilíneo uniforme, ¿cuánto tardará en recorrer 258 kilómetros si se desplaza con una velocidad de 86 kilómetros por hora?

Datos:
v = 86 km / h
d = 258 km
t = x
Fórmula:
t = d / v
Sustitución y resultados:
t = $\frac{258\text{ km / h}}{86\text{ km / h}}$
t = 3 h

Ejemplo. Un automóvil se desplaza con una velocidad de 30 m por segundo, con movimiento rectilíneo uniforme. Calcule la distancia que recorrerá en 12 segundos.

Datos:
v= 30 m/s
t = 12 seg.
d= ¿?

Procedimiento: Se aplica la fórmula conocida y se reemplazan los datos conocidos:

$$t = \frac{d}{v} \Rightarrow d = v \cdot t$$

$$d = v \cdot t = 30\frac{m}{\cancel{seg}} \cdot 12\ \cancel{seg} = 360\ m$$

El Automóvil recorrerá 360 metros.

Ejemplo. Un automóvil se desplaza con movimiento rectilíneo uniforme ¿cuánto tiempo tardará en recorrer 258 kilómetros si se mueve con una rapidez de 86 kilómetros por hora?

Datos:

D= 258 km
v= 86 km/h.
t= ¿?

Formula: Apliquemos la fórmula conocida para calcular el tiempo:

$$t = \frac{d}{v}$$

Reemplacemos con los datos que tenemos:

$$t = \frac{258\ \cancel{km}}{86\ \frac{\cancel{km}}{h}} = 3$$

El automóvil tardará 3 horas en recorrer 258 kilómetros si se desplaza a 86 Km/h.

EJERCICIO 01. Resuelva los siguientes problemas sobre movimiento rectilíneo uniforme.

1. Una bicicleta se desplaza por un camino horizontal. Si se mueve a razón de 8 m/s. ¿Cuánto tardará en recorrer 100 m?
2. Se desea saber la velocidad de un automóvil y una persona se para 700 m delante de donde el automóvil parte. Cuando pasa junto a él activa un cronómetro y lo detiene cuando el auto está a 1500 m de su punto de partida. Si el cronómetro marcó 40 s. ¿Cuál era la velocidad del automóvil?
3. Un atleta recorre 100 m en 10 s. a) ¿Con qué velocidad se desplaza?, b) ¿Qué distancia recorrería en una hora si pudiera mantener esa velocidad?
4. Un bus en el trayecto Guatemala-Chimaltenango, tarda una hora tres cuartos. Si la distancia que recorre es de 110 km, ¿Con qué velocidad se desplazó? Exprese el resultado en Km/h y en m/s.
5. La velocidad del sonido en el aire es de 340 m/s. ¿Cuánto tarda un espectador de un partido de fútbol en escuchar el ruido de un "disparo" (sonido del balón al ser golpeado) que se lanza a 127,5 m de distancia de él?
6. Un atleta corre una maratón de 42 kilómetros en 2 horas y 15 minutos. ¿Cuál es su velocidad?
7. Desde un mismo punto parten un automóvil azul, a razón de 72 km/hr, y una camioneta amarilla, a razón de 15 m/sg. a) ¿Qué distancia los separará al cabo de media hora si se dirigen hacia un mismo lugar?, b) ¿Qué distancia los separará al cabo de media hora si parten en sentidos contrarios?
8. Un automóvil recorre 40 km en media hora. a) ¿Cuál es su velocidad?; b) Si mantiene esa velocidad, ¿Cuánto tardará en recorrer 320 km, desde que partió?; c) ¿Qué distancia habrá recorrido en los primeros 16 minutos?
9. Un auto de juguete avanza según las siguientes condiciones: en madera a 0,5 m/s; en cemento a 0,4 m/s, en baldosa a 0,8 m/s. ¿Cuánto tarda en recorrer una distancia total de 20 metros, repartidos en 4 metros de madera, 2,5 metros de cemento y el resto en baldosa?
10. Un avión se mueve en línea recta a una velocidad constante de 400 km/h durante 1,5 h de su recorrido. ¿Qué distancia recorrió en ese tiempo?
    Datos: v = 400 k/h   t = 1,5 h   d = ?

11. Analiza la tabla de datos del movimiento de un corredor en un tramo recto de una competencia. Determina:

distancia (m)	0	10	20	30	40	50
tiempo (s)	0	2	4	6	8	10

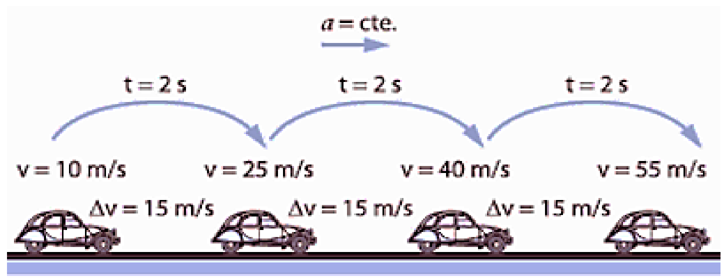
- ✓ El valor de la velocidad ha corrido 10 m, 30 m, y 50 m.
- ✓ El tipo de movimiento del corredor atendiendo al valor de su velocidad y al valor de su velocidad. Argumenta (desarrolle su respuesta).
- ✓ La distancia recorrida a los 4 s de iniciado el movimiento.

12. ¿Qué tiempo demorará una señal de radio enviada desde la Tierra en llegar a la Luna? Dato útil: Distancia desde la Tierra hasta la Luna (400 000 km/s) y la velocidad de expansión de la onda de radio es (300,000 K/s).

13. Un automóvil parte de la ciudad A a la B a una velocidad 20 Km/h otro automóvil parte en el mismo instante de la ciudad B a la A a 50 Km/h. Si las dos ciudades distan entre sí 200 Km, determinar la posición y el instante del encuentro de los dos automóviles.

MRUV

El Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado o Acelerado es un movimiento en el que un móvil es desplazado en línea recta, este a una velocidad que a diferencia del MRU (Movimiento Rectilíneo Uniforme) varía conforme al transcurrir del tiempo.



Es el movimiento que realiza una partícula que partiendo del reposo es acelerada por una fuerza constante.

Esta velocidad puede aumentar (y en ese caso el movimiento es acelerado) o disminuir (desacelerado). Al variar la velocidad en el tiempo, en tiempos iguales recorre distancias distintas.

La aceleración tiene un valor distinto de cero (positivo o negativo).

El espacio varía con el cuadrado del tiempo.

La aceleración es una magnitud vectorial con lo cual, además de un módulo, tenemos una dirección y un sentido.

Un signo negativo en la aceleración no necesariamente significa que la velocidad esté disminuyendo en valor absoluto. Puede estar aumentando en el sentido contrario al positivo del sistema de referencia fijado.

Si la velocidad viene disminuyendo y se hace cero sin que cambie la aceleración, el móvil se detendrá y comenzará a moverse en sentido contrario, esta vez aumentando su velocidad en valor absoluto. El vector que sí cambia de signo es el de la velocidad cuando comienza a moverse para el otro lado, pero la aceleración en este caso será la misma.

SIGNO DE LA ACELERACIÓN

Si el móvil tiene velocidad de signo positivo y aumentando, la aceleración es positiva.

Si el móvil tiene velocidad de signo positivo y disminuyendo, la aceleración es negativa. Es decir que disminuye la velocidad hasta que se haga cero. Luego, con esta misma aceleración negativa, el móvil comenzará aumentar de velocidad (en módulo) pero con signo negativo.

Si el móvil tiene velocidad negativa y aumentando, la aceleración es negativa. La velocidad aumenta, pero con en el signo contrario al sistema. Si el móvil se estaba moviendo antes de comenzar a contar el tiempo, en algún momento la velocidad podría haber sido cero (antes de ser negativa) y antes de eso positiva en disminución.

Si el móvil tiene velocidad negativa y disminuyendo, la aceleración es positiva. El móvil en algún momento se detendrá y comenzará a aumentar la velocidad en el sentido positivo (primer caso).

VALOR DE LA ACELERACIÓN

Según, lo mencionado anteriormente… sabemos que la aceleración en el movimiento uniformemente variado es la variación que experimenta la velocidad en la unidad de tiempo. Se considera positiva en el movimiento acelerado y negativa en el retardado.

Sea ***Vo*** la velocidad del móvil en el momento que lo observamos por primera vez (velocidad inicial) y sea ***V*** la velocidad que tiene al cabo de tiempo ***t*** (velocidad final).

La variación de velocidad en el tiempo ***t*** ha sido ***V - Vo*** y la aceleración será:

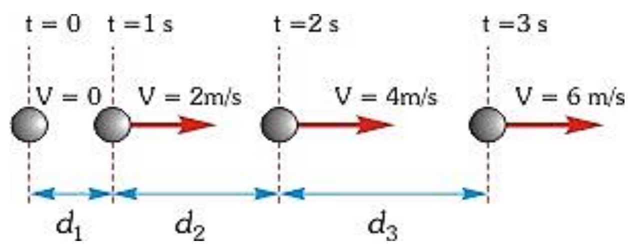
$$a = \frac{V_f - V_0}{t_f - t_0}$$

En el MRUV, identificamos que los móviles o partículas se mueven en línea recta, manteniendo una aceleración constante durante su trayectoria.

Es importante que pongas mucha atención en lo siguiente…

"Lo constante es la aceleración, lo que quiere decir, que la velocidad varía conforme avanza el tiempo".

En este tipo de movimiento el módulo de la velocidad del móvil aumenta o disminuye uniformemente al transcurrir el tiempo, lo que equivale a decir que, en iguales intervalos de tiempo su velocidad aumenta o disminuye en una misma cantidad, o que, los cambios de velocidad son proporcionales al intervalo de tiempo transcurrido.



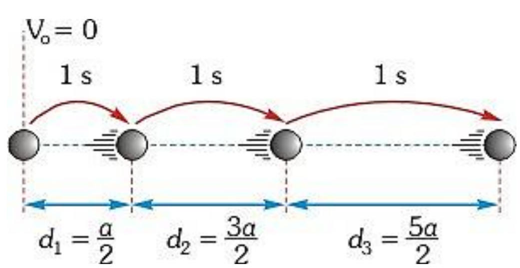
En el caso de la ilustración anterior, el móvil se mueve horizontalmente describiendo un MRUV en donde en cada segundo el módulo de su velocidad aumenta en 2 m/s. De esto se concluye que el módulo de su aceleración a es de 2 metros por segundo cuadrado (2 m/s^2).

En este ejemplo vemos que el móvil se mueve cada vez más rápido y por tanto las distancias recorridas por el móvil en cada segundo serán diferentes.

$$V_m = \frac{V_o + V_f}{2}$$

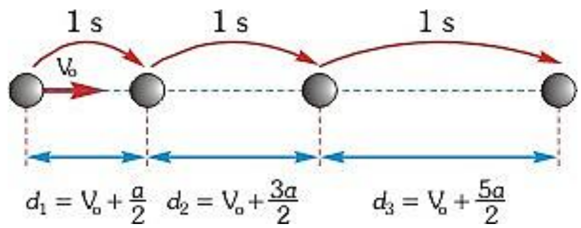
Ahora, deducimos que la *distancia* que ha recorrido el móvil en el 1er segundo (d_1 = 1 m) se obtiene multiplicando el valor de la velocidad media en este intervalo de tiempo (V_m = 1 m/s) por el tiempo de 1 s. Así mismo, la distancia recorrida en el 2do segundo (d_2 = 3 m) se obtiene multiplicando el valor de la velocidad media en este tramo (V_m = 3 m/s) por el tiempo de 1 s. Entonces, la distancia recorrida en el 3er segundo (d_3 = 5 m) se obtiene multiplicando el valor de la velocidad media en este tramo (V_m = 5 m/s) por el tiempo de 1 s.

En general, si un móvil parte del reposo y se mueve con MRUV, las distancias recorridas… en cada segundo aumenta en la forma que se indica en la siguiente ilustración:



Correspondiente a esto, cuando un móvil parte desde el reposo las distancias recorridas en cada segundo son proporcionales a los números 1; 3; 5; 7 y así sucesivamente. Cabe mencionar, que estos números son conocidos como.

Cuando el móvil no parte del reposo, es decir cuando la velocidad inicial Vo es diferente de cero… las distancias recorridas, en cada segundo aumenta en la forma que se indica en la figura:



Puedes observar que, en ambos casos las distancias recorridas por el móvil en cada segundo forman una serie aritmética de razón "a".

FÓRMULAS DEL MRUV

$$V_f = V_0 + a \cdot t$$

$$d = \left(\frac{V_0 + V_f}{2}\right) \cdot t$$

$$d = V_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$$

$${V_f}^2 = {V_0}^2 + 2 \cdot a \cdot d$$

$$x = V_0 \pm \frac{a}{2}(2n - 1)$$

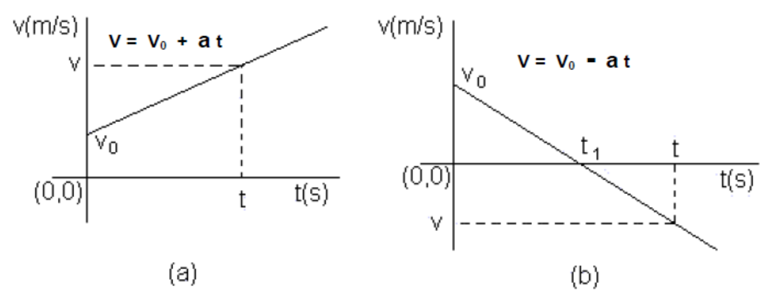
$$Corresponde\ a\ la\ distania\ en\ el\ n - ésimo\ segundo$$

Al momento de emplear estas fórmulas, las variables serán las siguientes…

- ✓ d: distancia recorrida.
- ✓ V_0: velocidad inicial.
- ✓ V_f: velocidad final
- ✓ a: aceleración.
- ✓ t: tiempo.

Gráficos de la Velocidad vs Tiempo (Aceleración Positiva y Negativa)

Observa que, en la imagen a) la pendiente es positiva correspondiente a aceleración positiva y en b) la pendiente es negativa correspondiente a una aceleración negativa. Ahora, en b) para t mayor que t_1 la velocidad es negativa, esto quiere decir que a partir de este instante la partícula se mueve en sentido negativo.



Ejemplo de MRUV:

Un ciclista comienza su paseo matutino y al cabo de 10 segundos su velocidad es de 7.2 km/h. En ese instante ve aproximarse un perro y comienza a frenar durante 6 segundos hasta que la bicicleta se detiene.

Se debe encontrar:

a) La aceleración hasta que comienza a frenar.
b) La aceleración con la que frena la bicicleta.
c) El espacio total recorrido.

Solución…

El movimiento puede descomponerse en 2 fases. Una primera fase en la que la aceleración es positiva (a>0) y otra segunda donde la aceleración es negativa ya que se frena (a<0).

Inciso a)

Datos:

Velocidad inicial → *V_0 = 0 m/s*
Velocidad a los 10s → *V_f = 7.2 km/h*
Transformando la velocidad a unidades del Sistema Internacional de Medidas, tenemos que la velocidad a los 10s es:

$$V = 7.2\ {}^{km}/_{h}\ \cdot \frac{1{,}000m}{1km} \cdot \frac{1h}{3{,}600s} = \ 2\,{}^{m}/_{s}$$

Resolución…

Se nos pide la aceleración en la primera fase del movimiento.

Dado que conocemos la velocidad inicial (0 m/s), la velocidad final (2 m/s) y el tiempo que transcurre entre las 2 velocidades (10 s), podemos utilizar la ecuación de la velocidad y despejar la aceleración para resolver esta cuestión directamente:

$$V = \ V_0 + a \cdot t$$

$$a = \frac{V - V_0}{t}$$

$$a = \frac{2\ {}^{m}/_{s}\ -\ 0\ {}^{m}/_{s}}{t}$$

$$a = \frac{2\ {}^{m}/_{s}}{10s}$$

$$a = 0.2\ {}^{m}/_{s^2}$$

Inciso b)

En este caso de MRUV, se te pide calcular la aceleración en la segunda fase.

Datos:

Velocidad Inicial. Sería la velocidad final de la primera fase, es decir, *V_0=2m/s.*
Velocidad a los 6s Como al final se detiene, la velocidad en ese instante será 0: *V=0m/s*

Resolución…

Aplicando la misma ecuación que en el apartado ha, obtenemos:

$$V = V_0 + a \cdot t$$

$$a = \frac{V - V_0}{t}$$

$$a = \frac{0\,{}^{m}/_{s} - 2\,{}^{m}/_{s}}{6s}$$

$$a = \ -0.33\ {}^{m}/_{s^2}$$

Inciso c)

El espacio recorrido por el ciclista será el espacio recorrido en la primera fase más el espacio recorrido en la segunda.

Espacio Recorrido en la Primera Fase

$$x = x_0 + V_0 \cdot \mathrm{t} + \frac{\mathrm{a} \cdot\ t^2}{2}$$

$$x\ =\ 0\,m\ + 0\ {}^{m}/_{s} \cdot\ 10\ s\ + \frac{0.2\ {}^{m}/_{s^2} \cdot\ 10s^2}{2}$$

$$x\ =\ 10\,m$$

Espacio Recorrido en la Segunda Fase:

$$x =\ x_0 +\ v_0\ \cdot t + \frac{a\ \cdot\ t^2}{2}$$

$$x = 0m + 2\ {}^{m}/_{s}\ \cdot 6s + \frac{-0.33\ {}^{m}/_{s}\ \cdot\ 6s^2}{2}$$

$$x = 12m - 5.94\ m$$

$$x = 6.06m$$

Por tanto, el espacio total recorrido es:

$$x_{total}\ =\ 10\,m\ +\ 6.06\,m\ \ \rightarrow\ \ 16.06\,m$$

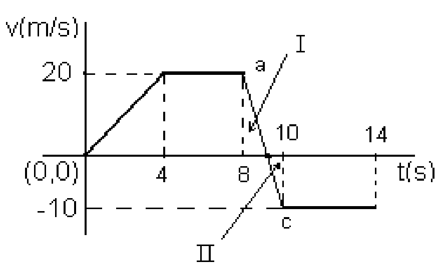
Otro ejemplo:

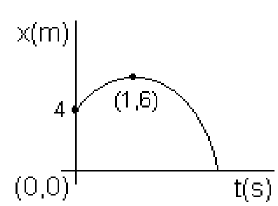
La figura muestra la relación v versus t para una partícula.

Calcula:

a) el desplazamiento de la partícula hasta los 12s.
b) la longitud del camino recorrido por la partícula en dicho intervalo.
c) ¿Cómo representaría el movimiento de la partícula sobre el eje X?

Luego, es necesario representar un esquema de la trayectoria e indique las posiciones para t = 0s, 8 s, para el instante en que v = 0, para los 12 s y 14 s.





Solución…

El desplazamiento se obtiene calculando el área entre la gráfica de v(t) "y" el eje t. El área hasta 12 s se puede calcular por partes:

$$de\ 0\ a\ 4s:$$

$$\frac{(4s)(20\,{}^{m}/_{s})}{2} = 40\ m$$

$$de\ 4s\ a\ 8s:$$

$$(4s)(20\,{}^{m}/_{s}) = 80\ m$$

De 8s a 10s: Para calcular esta área debemos considerar los triángulos semejantes I y II, considerando que la base del triángulo I es t´ se tiene que:

$$\frac{2}{30} = \frac{t'}{20}$$

$$de\ donde\ t\acute{}vale\ \frac{4}{3}s$$

Así el triángulo I tiene como área…

$$\frac{(20\ {}^{m}/_{s})\left(\frac{4}{3}s\right)}{2} = \frac{40}{3}m$$

y el del área del triángulo II, es:

$$\frac{\left(2s - \frac{4}{3}s\right)(-10\ {}^{m}/_{s})}{2} = -\frac{10}{3}\ m$$

a) y de 10 s hasta el segundo 12 el área es:

$$(-10\ {}^{m}/_{s})(2s) = -20m$$

El total el desplazamiento es:

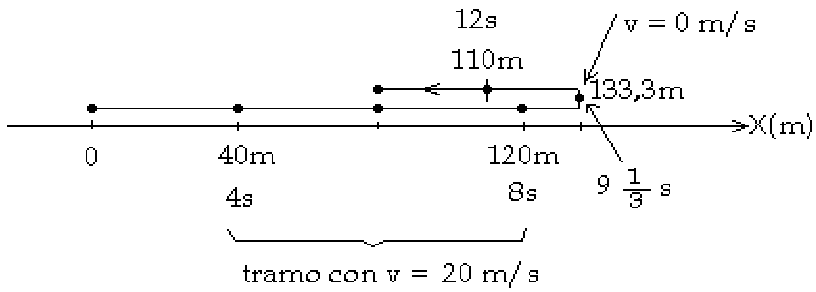
$$40\ m\ +\ 80\ m\ +\ (40/3)\ m\ -\ (10/3)\ m\ -\ 20\ m\ =\ 110\ m$$

Este resultado se interpreta como que el desplazamiento hasta los 12 s es 110 m en el sentido del semi-eje positivo de las X. Usualmente a la derecha del origen.

b) Para calcular la longitud del camino recorrido tomamos el módulo de los desplazamientos negativos:

$$40m + 80m + ({}^{40}/_{3})m + ({}^{10}/_{3})m + 20m = 156\ {}^{2}/_{3}\ m$$

c)



EJERCICIO 02. Resuelve los siguientes ejercicios de MRUV y entrégalos a tu catedrático/a. Deja constancia de los procedimientos. Resuélvelo en tu cuaderno.

PROBLEMA 01. Un cuerpo se mueve, partiendo del reposo, con una aceleracion constante de 8 m/s^2.

Calcular:

a) la velocidad que tiene al cabo de 5 s,
b) la distancia recorrida, desde el reposo, en los primeros 5 s.

PROBLEMA 02. La velocidad de un vehículo aumenta uniformemente desde 15 km/h hasta 60 km/h en 20s.

Calcular:

- **a)** La aceleración.
- **b)** La distancia en metros que ha recorrido el vehículo durante este tiempo.

PROBLEMA 03. Un vehículo que marcha a una velocidad de 15 m/s aumenta su velocidad a razón de 1 m/s cada segundo.

Realiza lo siguiente:

- **a)** Calcular la distancia recorrida en 6s.
- **b)** Si disminuye su velocidad a razón de 1 m/s cada segundo, calcular la distancia recorrida en 6s
- **c)** Determinar en cuánto tiempo que tarda en detenerse.

PROBLEMA 04. Un automóvil que marcha a una velocidad de 45 km/h, aplica los frenos y al cabo de 5s su velocidad se ha reducido a 15 km/h.

Calcular:

- **a)** Aceleracion.
- **b)** Distancia recorrida durante los cinco segundos.

PROBMELA 05. La velocidad de un tren se reduce uniformemente de 12m/s a 5m/s. Sabiendo que durante ese tiempo recorre una distancia de 100 m.

Calcular:

- **a)** la aceleración.
- **b)** la distancia que recorre a continuación hasta detenerse suponiendo la misma aceleración.

PROBLEMA 06. Un móvil que lleva una velocidad de 10 m/s acelera a razón de 2 m/s^2.

Calcula lo siguiente:

- **a)** El incremento de la velocidad del móvil durante 1 minuto.
- **b)** La velocidad final del primer minut0.
- **c)** La velocidad media durante el primer minuto.
- **d)** El espacio recorrido en 1 minuto.

PROBLEMA 07. Un móvil que lleva una velocidad de 8 m/s. Acelera uniformemente su marcha de forma que recorre 640 m en 40 s.

Calcular:

- **a)** La velocidad media durante los 40 s.
- **b)** La velocidad final.
- **c)** El incremento de velocidad en el tiempo dado.
- **d)** La aceleración.

PROBLEMA 08. Un automóvil parte del reposo con una aceleración constante de 5 m/s^2. Calcular la velocidad que adquere y el espacio que recorre al cabo de 4s

PROBLEMA 09. Un cuerpo cae por un plano inclinado con una aceleración constante partiendo del reposo. Sabiendo que al cabo de 3s la velocidad que adquiere es de 27 m/s. Calcular la velocidad que lleva y la distancia recorrida a los 6s de haber iniciado el movimiento.

PROBLEMA 10. Un móvil parte del reposo con una aceleración constante y cuando lleva recorridos 250m, su velocidad es de 80 m/s. Calcular la aceleración del móvil.

De entre todos los movimientos rectilíneos uniformemente variados (MRUV), que se dan en la naturaleza… existen dos de muy particular interés: la caída libre y el lanzamiento vertical. A continuación, para finalizar la unidad se estudia la Caída Libre. Ambos se rigen por las ecuaciones propias del MRUV.